Instabilité spectrale semiclassique d'opérateurs non-autoadjoints II

Mildred Hager

INSTABILITÉ SPECTRALE SEMICLASSIQUE D'OPÉRATEURS NON-AUTOADJOINTS II

par

Mildred Hager

Résumé. — Dans ce travail, nous considérons des opérateurs (pseudo-)différentiels analytiques ainsi que des perturbations multiplicatives aléatoires. Nous montrons pour les opérateurs perturbés qu'avec une probabilité proche de 1, les valeurs propres dans un sous-ensemble du pseudospectre se distribuent d'après une loi de Weyl.

Abstract. — In this work, we consider analytic (pseudo-)differential operators as well as random perturbations. We show for the perturbed operators that with probability almost 1, the eigenvalues inside a subdomain of the pseudospectrum are distributed according to a bidimensional Weyl law.

1. Introduction

La notion de pseudospectre a été beaucoup étudié récemment (voir [**3**], [**15**] et les références qui y sont indiquées), ce qui a permis une meilleure compréhension des propriétés spectrales d'opérateurs non-autoadjoints. Les pseudospectres sont les régions délimitées par les courbes de niveau de la norme de la résolvante, et sont reliés aux valeurs spectrales possibles pour l'opérateur perturbé par une petite perturbation.

Un des opérateurs les plus étudiés dans ce contexte est l'opérateur de Schrödinger à potentiel complexe. En effet, de nombreux travaux sur les résonances ([**7**], [**13**], [**12**] pour n'en citer que quelques uns) traitent les problèmes d'estimation de la norme de la résolvente dans ce cadre. Davies

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 34E10, 47G10, 47A75.
Mots clefs. — Pseudospectre, perturbation, opérateurs non-autoadjoints.

fait en '99 une construction de ses quasimodes et analyse ainsi son pseudospectre ([**2**]), Boulton étudie l'oscillateur harmonique non-autoadjoint ([**1**]), et Zworski étudie un conjugué non-autoadjoint de l'oscillateur harmonique intervenant lors de l'étude des résonances en chimie quantique ([**17**]). Dans ce dernier travail, il constate aussi lors de calculs numériques une migration des valeurs propres vers le bord du pseudospectre, ce qui nous a entre autre motivé d'entreprendre ici une étude perturbative des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger non-autoadjoint. Dans la dynamique des fluides, on est conduit dans un certain cadre à l'opérateur d'Orr-Sommerfeld ([**9**]) qui, après certaines simplifications, est réduit aussi à un opérateur de Schrödinger à potentiel complexe.

Dans un cadre plus général, Zworski a mis en évidence la construction de Quasimodes pour des opérateurs h-pseudodifférentiels avec une condition de commutateur de Hörmander ([**16**]). Dencker, Sjöstrand et Zworski étudient dans ce cadre le pseudospectre semiclassique ([**4**]), et mettent en évidence une région déterminée par des grandeurs classiques où la norme de la résolvante de l'opérateur quantifié correspondant sera $\geq C_N h^{-N}$, $\forall N$, respectivement exponentiellement grande dans le cas analytique. Notre approche est fortement basée sur leur travail.

Nous avons, dans le cas d'un opérateur-modèle perturbé par des noyaux oscillants, trouvé une asymptotique de Weyl (bidimensionelle) pour le nombre de valeurs propres (voir [**6**]). Ceci a été le point de départ pour « généraliser » ce résultat.

Ici nous allons examiner le comportement spectral d'opérateurs h-pseudodifférentiels à symbole analytique pair en ξ (notamment l'opérateur de Schrödinger à potentiel analytique) sous des perturbations mulitplicatives « aléatoires », et nous allons trouver qu'avec une probabilité très proche de 1 le nombre de valeurs propres de l'opérateur perturbé dans des domaines à l'intérieur du pseudospectre est donné par une asymptotique de Weyl ; pour ce genre de perturbations il n'y aurait donc pas forcément de migration des valeurs propres vers le bord.

Remerciements : Ce travail fait partie de la thèse de l'auteur préparée sous la direction de J. Sjöstrand.

Nous commençons par préciser les hypothèses sur les opérateurs non-autoadjoints que nous considérons.

Soit $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ (donc $p \in C^\infty$ et p ainsi que toutes ses dérivées sont bornés par la fonction d'ordre m, cf. Définition 2.3) indépendant de h. Nous dénotons par $P = p^w$ son quantifié de Weyl, que nous considérons dans $L^2(\mathbb{R})$. Toutes les normes non-indexées seront des normes L^2, respectivement $\mathcal{L}(L^2)$.

Définition 1.1. —
$$\Sigma := \overline{p(T^*(\mathbb{R}))} \ . \tag{1.1}$$

Nous identifions partout $T^*(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^2$.

***Définition 1.2* (Crochet de Poisson)**. — *Pour $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, le crochet de Poisson est défini par*
$$\{f, g\}(x, \xi) := (f_\xi g_x - f_x g_\xi)(x, \xi) \ . \tag{1.2}$$

Nous prenons la variable spectrale dans un domaine (c'est à dire un ouvert connexe) relativement compact à l'intérieur de Σ :
$$z \in \Omega \subset\subset \overset{\circ}{\Sigma} \ . \tag{1.3}$$

A partir de maintenant nous supposons

Hypothèse 1.3. — $\forall z \in \Omega$ *nous avons*
$$\begin{aligned} &p^{-1}(z) = \{\rho_-^j(z), \rho_+^j(z),\ j = 1, ..., n\} \\ &\textit{où } \pm \frac{1}{2i}\{p, \overline{p}\}(\rho_\pm) = \pm Im\,(p_\xi \overline{p_x})(\rho_\pm) > 0 \ . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Nous allons souvent poser $n = 1$ si le cas général se traite de manière analogue.

Nous introduisons, pour $\Gamma \subset \Omega$ un ensemble,
$$\Gamma_{-+}(\Gamma) = \{\rho_-^j(z), \rho_+^j(z), j = 1, ..., n,\ z \in \Gamma\} \subset (T^*(\mathbb{R}))^{2n} \ . \tag{1.5}$$
Si Γ est un domaine, $\Gamma_{-+}(\Gamma)$ est symplectique par rapport à la forme symplectique $\sum_j (d\xi_j \wedge dx_j - d\eta_j \wedge dy_j)$, et nous dénotons le volume correspondant par $|\Gamma_{-+}(\Gamma)|$, qui s'exprime aussi comme
$$|\Gamma_{-+}(\Gamma)| = \sum_j (\mathrm{vol}(\{\rho_-^j(z), z \in \Gamma\}) + \mathrm{vol}(\{\rho_+^j(z), z \in \Gamma\})). \tag{1.6}$$

Hypothèse 1.4. — *Soit m une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^2$, $m \geq 1$.*

Soit $\widetilde{\Omega} \subset\subset \mathbb{C}$ un domaine, $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$. Soit $(p - z) \in S(\mathbb{R}^2, m)$ indépendant de h. Nous supposons que $(p - z)$ est elliptique à l'infini uniformément $\forall z \in \widetilde{\Omega}$:
$$\exists C > 0 \textit{ tel que } \forall z \in \widetilde{\Omega},\ |p(X) - z| > \frac{1}{C} m(X),\ \forall X \in \mathbb{R}^2, |X| > C \ ,$$

et que $\exists z_0 \in \widetilde{\Omega}$ *tel que* $p - z_0$ *est elliptique :*

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |p(X) - z_0| > \frac{1}{C} m(X),\ \forall X \in \mathbb{R}^2 .$$

La condition $m \geq 1$ garantit que $(p - z) \in S(\mathbb{R}^2, m)$ $\forall z \in \Omega$. L'ellipticité à l'infini assure que $\exists C$ tel que $|\rho_\pm(z)| \leq C$, $\forall z \in \Omega$. L'ellipticité à l'infini et l'ellipticité en un point impliquent que p^w a, pour h assez petit, un spectre purement discret dans $\widetilde{\Omega}$ (cf. Proposition 4.5).

Soit ensuite

$$\Sigma_\infty := \{ z \in \Sigma \ : \ \exists (x_j, \xi_j) \in T^*(\mathbb{R}) \text{ t. q. } p(x_j, \xi_j) \to z,\ |(x_j, \xi_j)| \to \infty \} .$$

Alors nous avons pour $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$, $\widetilde{\Omega}$ un domaine,

$$\exists z_1 \in \widetilde{\Omega} \text{ t. q. } (p - z_1) \text{ est elliptique à l'infini} \ \ , \ \ z \in \widetilde{\Omega} \setminus \Sigma_\infty$$
$$\Rightarrow \ (p - z) \text{ est elliptique à l'infini.}$$
$$\exists z_1 \text{ t. q. } (p - z_1) \text{ est elliptique à l'infini} \ \ , \ \ z \in \widetilde{\Omega} \setminus \Sigma$$
$$\Rightarrow \ (p - z) \text{ est elliptique.}$$

Pour le résultat final, nous avons besoin d'une hypothèse d'analyticité :

Hypothèse 1.5. — *Soit* $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ *indépendant de* h *comme dans l'hypothèse 1.4. Nous supposons que* $\exists c > 0$ *tel que* p *est analytique dans un voisinage tubulaire de* $\mathbb{R}^2$

$$S_c = \{ X \in \mathbb{C}^2 ; |Im X| < c \} \tag{1.7}$$

et y remplit $|p(X)| \leq m(Re X)$.

Hypothèse 1.6. — *Nous supposons que* $p(x, -\xi) = p(x, \xi)$ *; ceci implique que* $\frac{1}{2i}\{p, \overline{p}\}(x, -\xi) = -\frac{1}{2i}\{p, \overline{p}\}(x, \xi)$ *et donc on peut prendre* $\rho_\pm^j = (x^j, \pm\xi^j)$. *Nous supposons que* $x^j \neq x^k$, $j \neq k$.

Il est connu pour $p = \xi^2 + V(x) \in S(\mathbb{R}^2, m)$ (voir [**2**], [**16**], [**4**]) que les hypothèses 1.3, 1.4 impliquent que $\forall z \in \Omega$, $\forall j$,

$$\exists\ e_+^j = e_+^j(x, z; h) \in \mathscr{S},\ \|e_+^j\| = 1,\ \|(P - z) e_+^j\| = O(h^\infty), \tag{1.8}$$

où e_+^j sera « concentré près de ρ_+^j », et

$$\exists\ e_-^j = e_-^j(x, z; h) \in \mathscr{S},\ \|e_-^j\| = 1,\ \|(P^* - \overline{z}) e_-^j\| = O(h^\infty), \tag{1.9}$$

où e_-^j sera « concentré près de ρ_-^j ». Dans la section 2 nous aurons l'occasion de reétablir ce résultat. Remarquons aussi que dans le cadre de l'hypothèse 1.5, nous pouvons remplacer $O(h^\infty)$ par $O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ (voir [**4**]).

Ceci implique que dans Ω, la norme de la résolvante sera $\geq C_N h^{-N}$, $\forall N$ (respectivement $\geq e^{\frac{1}{Ch}}$ pour un $C > 0$) : Ω est contenu dans le *pseudospectre semiclassique.*

Finalement, dans le cadre de l'hypothèse 1.6, nous avons, en écrivant $\Gamma f(x) := \overline{f}(x)$, que

$$\Gamma(p^w - z)\Gamma = \overline{(p(x, -\xi) - z)}^w = \overline{(p(x,\xi) - z)}^w = (p^w - z)^* \qquad (1.10)$$

donc $(p^w - z)^* \Gamma e^j_+ = O(h^\infty)$ (car $\Gamma^2 = 1$) et nous pouvons prendre $e^j_+ = \overline{e^j_-}$.

Exemple 1.7 **(Opérateur de Schrödinger)**. — Examinons ces hypothèses pour l' opérateur de Schrödinger

$$p(x, \xi) = \xi^2 + V(x) \in S(\mathbb{R}^2, m)\ , \quad m(x, \xi) = \xi^2 + m_V(x)\ . \qquad (1.11)$$

On suppose que m_V est une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}$. Alors m est une fonction d'ordre sur $\mathbb{R}^2$. Nous avons $p(x, -\xi) = p(x, \xi)$, et

$$\frac{1}{2i}\{p, \overline{p}\}(x, \xi) = -2\xi \mathrm{Im}\, V'(x)\ . \qquad (1.12)$$

Soit, pour $U \subset \mathbb{C}$ un ensemble, $U \pm \mathbb{R}_+ = \{w = z \pm r\ ;\ z \in U, r > 0\}$; alors l'hypothèse 1.3 devient :

$$\Omega \subset (V(\mathbb{R}) + \mathbb{R}_+) \setminus V(\mathbb{R});\ x \in V^{-1}(\Omega - \mathbb{R}_+) \Rightarrow \mathrm{Im}\, V'(x) \neq 0\ , \quad (1.13)$$

et nous avons $\rho^j_\pm = (x^j, \pm\xi^j)$, $(\xi^j)^2 = \mathrm{Re}\,(z - V(x^j)) \neq 0$, donc p remplit bien l'hypothèse 1.6.

L'hypothèse 1.4 devient :
$m_V \geq 1$. $\exists C > 0$ tel que si $|x| > C$, alors pour

$$T = \{z \in \mathbb{C};\ |\mathrm{Im}\, z| \leq -\frac{1}{C'}\mathrm{Re}\, z\}\ , \qquad (1.14)$$

nous avons $V(x) \notin \widetilde{\Omega} + T$ et $|V(x) - z| \geq \frac{1}{C} m_V(x)$, $\forall z \in \widetilde{\Omega}$. $\exists z_0 \in \widetilde{\Omega}$ tel que $(V(\mathbb{R}) - z_0) \cap T = \emptyset$ et que $V - z_0$ est elliptique dans $S(\mathbb{R}; m_V)$.

En fait, il suffit de considérer $z_0 = 0$ en remplaçant p par $p - z_0$. Si $\mathrm{Re}\, V(x) \geq 0$, alors $|p(x, \xi)| \geq \frac{1}{C} m(x, \xi)$, car tous le termes sont positifs et V est elliptique. Si $\operatorname{Re} V(x) \leq 0$, alors

$$\begin{aligned}|p(x,\xi)|^2 &\geq \frac{1}{2(C')^2}(|\xi^2|^2 - |\operatorname{Re} V(x)|^2) + |\operatorname{Im} V(x)|^2 \\ &\geq \frac{1}{C_2}|\xi^2|^2 + \frac{1}{C_3}(|\operatorname{Re} V(x)|^2 + |\operatorname{Im} V(x)|^2) \\ &\geq \frac{1}{C_4} m(x,\xi)^2 \ , \end{aligned} \tag{1.15}$$

donc $p - z_0$ est elliptique. L'ellipticité à l'infini se démontre de manière similaire. Ainsi la condition (1.14) implique l'hypothèse 1.4, et l'implication opposée se montre facilement avec $p(x,0) = V(x)$.

Considérons finalement le cas $V(x) = cx^2$ où $\operatorname{Re} c, \operatorname{Im} c > 0$ par simplicité. Cet « oscillateur harmonique non-autoadjoint » a été étudié en détail par Davies [**2**], Boulton [**1**]. Nous voyons que

$$\Sigma(p) = \{z; \operatorname{Im} z \geq 0, \operatorname{Re} z \geq \frac{\operatorname{Re} c}{\operatorname{Im} c} \operatorname{Im} z\} \ . \tag{1.16}$$

De plus $\frac{1}{2i}\{p, \overline{p}\} = -4 \operatorname{Im} c \xi x$ ne s'annule pas pour $p(x,\xi)$ à l'intérieur de Σ. p est elliptique à l'infini uniformément sur tout compact, donc il est possible de choisir un domaine $\Omega \subset\subset \overset{\circ}{\Sigma}$, et $\Omega \subset \widetilde{\Omega}$ avec $\widetilde{\Omega} \cap \Sigma^c \neq \emptyset$ tels que les hypothèses 1.3 et 1.5 soient remplies.

Nous introduisons maintenant les perturbations que nous allons considérer.

Pour les notions probabilistes nous renvoyons à la section 6.1. Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Nous introduisons, pour $M \subset \mathcal{M}$, la probabilité inférieure de M

$$\underline{P}[M] := \sup_{A \in \mathcal{A}; A \subset M} P[A] \tag{1.17}$$

ainsi que la probabilité supérieure de M

$$\overline{P}[M] := \inf_{A \in \mathcal{A}; M \subset A} P[A] \ , \tag{1.18}$$

afin d'éviter les questions de mesurabilité.

Hypothèse 1.8. — *Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité. Soit $\sigma(h) > 0$,*

$$\mathcal{M} \ni \omega \mapsto q_\omega \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}) \tag{1.19}$$

une application dépendant aussi de $h > 0$.

Nous supposons que $\underline{P}[q_\omega \in L^\infty] = 1$, *et qu'il existe* M_0, $D > 0$ *indépendants de* h *et de* $\sigma(h)$ *tels que*

$$\underline{P}[\|q_\omega\|_\infty \leq 1] \geq 1 - Dh^{-M_0}\sigma(h) \ . \tag{1.20}$$

Si $q_\omega \in L^\infty$, $\|q_\omega\|_\infty \leq 1$, *nous définissons*

$$Qu(x) := q_\omega(x)u(x) \ , \ \|Q\| \leq 1 \ . \tag{1.21}$$

Pour $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$ *remplissant les hypothèses 1.3, 1.5 et 1.6, soit* e_-^j *comme dans (1.9). Nous écrivons, pour* $u \in \mathscr{S}', v \in \mathscr{S}$, $\langle u, v\rangle := \langle u, \overline{v}\rangle_{\mathscr{S}',\mathscr{S}}$ *(donc si* $u \in L^2$, *nous retrouvons le produit scalaire* L^2*). Nous supposons qu'il existe* $\kappa \in \mathbb{R}$ *tel que* $\forall z \in \Omega$, $\forall j$, $\forall t > 0$,

$$\overline{P}[\ |\langle q_\omega, (e_-^j)^2(z)\rangle| \leq t] \leq \frac{t^2}{\sigma^2 h^\kappa} \ . \tag{1.22}$$

Soit finalement $\delta = \delta(h)$ *un paramètre de perturbation avec*

$$e^{-\frac{1}{D_0 h}} < \delta < \frac{1}{C_0} h^{\frac{3}{2}} \ , \tag{1.23}$$

où $C_0 > 0$ *et* $D_0 > 0$ *sont assez grands.*

Théorème 1.9. — *Soit* $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$ *remplissant les hypothèses 1.3, 1.5 et 1.6, et soient* q, δ *comme dans l'hypothèse 1.8. Alors pour tout domaine* $\Gamma \subset\subset \Omega$, $\partial\Gamma \in C^\infty$, $\exists C > 0$, $\exists D' > 0$ *tel que si* h *est assez petit, nous avons avec une probabilité inférieure minorée par*

$$1 - D' \frac{(\delta)^{\frac{2}{n}}}{(\ln \frac{1}{\delta})^{\frac{1}{2}} \sigma^2 h^{\frac{3}{n}+\kappa+\frac{1}{2}}} - D\sigma(h)h^{-M_0} \tag{1.24}$$

que

$$|\#\big(Spec(p^w + \delta Q) \cap \Gamma\big) - \frac{1}{2\pi h}|\Gamma_{-+}(\Gamma)|| \leq C(\frac{\ln \frac{1}{\delta}}{h})^{\frac{1}{2}} \ . \tag{1.25}$$

Ici M_0, D *et* κ *sont les constantes de l'hypothèse 1.8.*

Corollaire 1.10. — *Soit* $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$ *remplissant les hypothèses 1.3, 1.5 et 1.6, et soit* $\Gamma \subset\subset \Omega$ *un domaine,* $\partial\Gamma \in C^\infty$. *Il existe* $0 < \epsilon_0 << 1$ *tel que pour tout* $\tilde{\kappa}$, $\exists C > 0$, $\exists \kappa_0 > 0$ *tel que* $\forall\ 0 < \epsilon < \epsilon_0$ *il existe* $h(\epsilon, \tilde{\kappa}) > 0$ *tel que si* q, $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$ *sont comme dans l'hypothèse 1.8 pour* $\sigma(h) = h^{\kappa_0}$, *alors avec une probabilité inférieure minorée par* $1 - O(h^{\tilde{\kappa}})$ *nous avons*

$$|\#\big(Spec(p^w + \delta Q) \cap \Gamma\big) - \frac{1}{2\pi h}|\Gamma_{-+}(\Gamma)|| \leq C\frac{\sqrt{\epsilon}}{h} \ , \tag{1.26}$$

pour $h < h(\epsilon, \tilde{\kappa})$.

Nous généralisons ensuite ce résultat à une famille de domaines. Soit pour $C > 0$, $C' > 0$,

$$\mathcal{F} = \{G \in C^\infty(\overline{\Omega});\ |G| + |G'| + |G''| \leq C,\ |G| + |G'| > \frac{1}{C'},$$
$$|G(z)| > \frac{1}{C'}, z \in \partial\Omega\}\ , \tag{1.27}$$

et soit

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \{\Gamma \subset \Omega; \Gamma = \{G(z) \leq 0\}, G \in \mathcal{F}\}. \tag{1.28}$$

Théorème 1.11. — *Soit* $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$ *remplissant les hypothèses 1.3, 1.5 et 1.6, et soient* q, δ *comme dans l'hypothèse 1.8. Alors il existe* $C > 0$, $D' > 0$ *tels que si* $h > 0$ *est assez petit, alors avec une probabilité inférieure minorée par*

$$1 - D' \frac{(\delta)^{\frac{2}{n}}}{(\ln \frac{1}{\delta}) \sigma^2 h^{\frac{3}{n} + \kappa + 1}} - D\sigma(h) h^{-M_0} \tag{1.29}$$

nous avons (1.25) pour tout domaine $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

Le corollaire 1.10 s'adapte aussi ici.

Nous examinons ensuite un exemple pour la perturbation.

Hypothèse 1.12. — *Soit* m' *une fonction d'ordre sur* $\mathbb{R}^2$ *telle que* $m'(x, \xi) \geq \langle (x, \xi) \rangle^\alpha$, $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, *pour un* $\alpha > 0$. *Soit* $\tilde{P} = \tilde{p}^w$, $\tilde{p} \in S(\mathbb{R}^2, m')$ *indépendant de* h, *un opérateur elliptique autoadjoint,* $\tilde{P} \geq 1$, *qui admet une base orthonormée (dans* L^2*) de fonctions propres* q_l *:*

$$\tilde{P} q_l = E_l q_l\ , \tag{1.30}$$

où les E_l *forment une suite croissante.*

Soit $N = N(h) = \frac{C}{h}$, $C > 0$ *assez grand, et soit*

$$q(x) := \sum_{l \leq N} \alpha_l q_l(x)\ , \tag{1.31}$$

où les α_l *sont des variables aléatoires complexes indépendantes identiquement distribuées selon une loi normale (centrée en* 0*) de variance* $\sigma^2 = \sigma^2(h)$.

Soit finalement δ *un paramètre de perturbation comme dans (1.23).*

Remarquons que l'oscillateur harmonique $\tilde{p} = \xi^2 + x^2 + 1$ remplit cette hypothèse pour $\alpha = 2$.

Nous vérifions dans la section 6.5 que l'hypothèse 1.12 implique l'hypothèse 1.8, donc le théorème suivant sera une conséquence immédiate des théorèmes 1.9 et 1.11.

Théorème 1.13. — *Soit $p \in S(\mathbb{R}^2; m)$ remplissant les hypothèses 1.3, 1.5 et 1.6. Nous supposons que q, δ sont comme dans l'hypothèse 1.12 pour $N(h) = N(h, \Omega)$. Alors les conclusions des théorèmes 1.9 et 1.11 sont valables.*

Dans ce travail, nous commençons par rappeler des résultats sur le calcul h-pseudodifférentiel. Ensuite nous allons construire les quasimodes avec erreur $O(h^\infty)$ dans (1.8) et (1.9) à l'aide d'un théorème de factorisation qui réduira p^w microlocalement à l'opérateur modèle étudié dans [**6**]. Ceci nous permettra de poser un problème de Grushin, qui reliera le spectre de p^w aux zéros d'une fonction. Nous examinons ensuite le problème de Grushin pour l'opérateur perturbé par une petite perturbation, et montrons qu'il reste bien-posé. Nous obtenons aussi un développement perturbatif de la fonction dont les zéros déterminent le spectre de l'opérateur perturbé.

Il s'agira ensuite de résoudre une équation $\overline{\partial}$ pour construire une fonction holomorphe en z ayant les mêmes zéros, pour appliquer un théorème sur les zéros d'une fonction holomorphe bornée par un poids sousharmonique, et l'atteignant prèsque en certains points, déjà utilisé dans [**6**]. Ce théorème nous permettra de retrouver le volume symplectique intervenant dans la loi de Weyl.

Finalement nous devons estimer la probabilité de pouvoir appliquer l'analyse précédente à notre perturbation aléatoire, ce qui terminera la preuve du théorème 1.9.

2. Quantification de Weyl, espaces de symboles et de Sobolev « semiclassiques »

Tous les résultats cités ici se retrouvent par exemple dans [**5**], chap.7.

Les normes sans indice se réfèreront aux normes L^2 (respectivement $\mathcal{L}(L^2)$), et il sera sous-entendu que $h \in (0,1]$. Nous utilisons la convention

$$\langle u, v\rangle = \int u(x)\overline{v}(x)dx \ , \quad u, v \in L^2 \ , \tag{2.1}$$

pour le produit scalaire L^2. Nous dénotons par C_b^∞ les fonctions lisses bornées, ayant toutes les dérivées bornées.

2.1. Quantification dans $\mathscr{S}$. —

Définition 2.1. — *La h-transformation de Fourier est définie, pour $u \in \mathscr{S}$, par*

$$(\mathcal{F}_h u)(\xi) := \int e^{-\frac{i}{h}\xi x} u(x) dx \ . \tag{2.2}$$

La h-transformation de Fourier inverse est donnée, pour $u \in \mathscr{S}$, par

$$(\mathcal{F}_h^{-1} u)(x) := \frac{1}{2\pi h} \int e^{\frac{i}{h}\xi x} u(\xi) d\xi \ . \tag{2.3}$$

Nous commençons par considérer des symboles dans $\mathscr{S}$.

***Définition 2.2* (Quantification de Weyl).** — *Pour $p \in \mathscr{S}$, le (h-) quantifié de Weyl est défini par*

$$p^w u(x) := \frac{1}{2\pi h} \iint e^{\frac{i}{h}(x-y)\xi} p(\frac{x+y}{2}, \xi) u(y) dy d\xi \ . \tag{2.4}$$

C'est une application bien-définie, continue $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}$; ceci se voit en considérant le noyau de p donné par

$$K(x,y) = \left((\mathcal{F}_{h,2})^{-1} p\right) (\frac{1}{2}(x+y), x-y) \in \mathscr{S} \ . \tag{2.5}$$

où la transformation de Fourier agit uniquement sur la deuxième variable.

Pour $p \in \mathscr{S}'$ nous pouvons définir $p^w : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ qui est continu (envoie toute suite convergente dans $\mathscr{S}$ sur une suite faiblement convergente dans $\mathscr{S}'$).

Remarquons inversément que si A est un opérateur continu $\mathscr{S} \to \mathscr{S}'$, alors son noyau de distribution $K \in \mathscr{S}'$ permet d'introduire le symbole

$$a(x,\eta) = \int e^{-\frac{i}{h} y\eta} K(x + \frac{1}{2}y, x - \frac{1}{2}y) dy \in \mathscr{S}' \ , \tag{2.6}$$

et nous avons $A = a^w$.

2.2. Espaces de symboles, quantification, composition, continuité. — Nous écrivons $\langle X\rangle := (1+|X|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Définition 2.3 **(Fonction d'ordre et espaces de symboles)**
Nous appelons $m \in C^0(\mathbb{R}^n,(0,\infty))$ *une* fonction d'ordre*, si* $\exists N>0$, $\exists C>0$ *tels que*

$$m(X) \leq C\langle X-Y\rangle^N m(Y),\ \forall X,Y\in\mathbb{R}^n\ . \tag{2.7}$$

Nous introduisons l'espace de symboles

$$\begin{aligned} S(\mathbb{R}^n,m) := \{p\in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \forall\alpha\in\mathbb{N}^n,\ \exists C_\alpha\ t.q.\\ |\partial_X^\alpha p(X)|\leq C_\alpha m(X)\ ,\ X\in\mathbb{R}^n\ \}\ .\end{aligned} \tag{2.8}$$

Remarquons que si m est une fonction d'ordre, alors $\frac{1}{m}$ est une fonction d'ordre aussi.

$S(\mathbb{R}^2,m)$ est un espace de Fréchet.

Lemme 2.4. — *$\mathscr{S}$ est dense dans $S(\mathbb{R}^2,m)$ pour la topologie de $S(\mathbb{R}^2,m\langle X\rangle^\epsilon)$, $\epsilon>0$.*

Nous continuons par montrer qu'il existe un $\tilde m\in S(\mathbb{R}^2,m)$ tel que $\tilde m\sim m$ (ce qui veut dire : il existe $C>0$ tel que $\frac{1}{C}m\leq\tilde m\leq Cm$). Soit $B_r(x)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r. Considérons le régularisé de m qui, pour $\chi\in C_c^\infty(B_1(0);[0,\infty))$ avec $\int_{B_1(0)}\chi=1$, est défini par

$$\tilde m := \chi * m\in C^\infty(\mathbb{R}^2)\ . \tag{2.9}$$

Alors $\exists C_0'>0$ tel que

$$\tilde m(X)\leq\int\chi(X-Y)\langle X-Y\rangle^{N_0}dY C_0 m(X)\leq C_0' m(X)\ ,$$

ainsi que

$$\tilde m(X)\geq\int\chi(X-Y)\langle X-Y\rangle^{-N_0}dY C_0^{-1} m(X)\geq (C_0')^{-1} m(X)\ ,$$

donc $\tilde m\sim m$ et $\tilde m$ est une fonction d'ordre aussi.

Ceci implique que $S(\mathbb{R}^2,\tilde m)=S(\mathbb{R}^2,m)$ et nous allons par la suite uniquement considérer des fonctions d'ordre m avec $m\in S(\mathbb{R}^2,m)$.

Proposition 2.5 **(Continuité dans $\mathscr{S}$).** — *Pour $h\in(0,1]$ fixé, $p\in S(\mathbb{R}^2,m)$, p^w est continu $\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'\to\mathscr{S}'$.*

De plus, pour toute seminorme n_k sur $\mathscr{S}$, il existe des seminormes n_j sur $\mathscr{S}$, $\tilde{n}_l$ sur $S(\mathbb{R}^2, m)$ telles que

$$n_k(p^w u) \leq C_k \tilde{n}_l(p) n_j(u) \ \forall p \in S(m),\ u \in \mathscr{S}\ . \tag{2.10}$$

Si $p(x, \xi, h)$ dépend de h nous disons que $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ si $p(., h)$ est uniformément borné dans $S(\mathbb{R}^2, m)$ pour $h \in (0, 1]$.

Soit $S^k(\mathbb{R}^2, m) := h^{-k} S(\mathbb{R}^2, m)$, $S^{-\infty}(\mathbb{R}^2, m) = \bigcap S^k(\mathbb{R}^2, m)$.

Définition 2.6 **(Equivalence asymptotique)**. — *Pour $a, a_k \in S(\mathbb{R}^2, m)$, $k \geq 0$ nous écrivons*

$$a \sim \sum_{k \geq 0} a_k h^k \tag{2.11}$$

pour dire que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad a(x; h) - \sum_{0 \leq k \leq N} a_k(x) h^k \in S^{-(N+1)}(\mathbb{R}^2, m)\ . \tag{2.12}$$

Lemme 2.7 **(Resommation)**. — *Si $a_j \in S(\mathbb{R}^2, m), j \geq 0$, alors il existe un $a = a(x; h) \in S(\mathbb{R}^2, m)$ (unique dans $S(\mathbb{R}^2, m)/S^{-\infty}(\mathbb{R}^2, m)$) tel que*

$$a \sim \sum_{k \geq 0} a_k h^k\ . \tag{2.13}$$

Définition 2.8 **(Symboles classiques)**. — *Nous appelons symbole classique un symbole dans $S(\mathbb{R}^2, m)$ tel qu'il existe une suite $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $a_j \in S(\mathbb{R}^2, m)$ indépendant de h, telle que*

$$a \sim \sum_{j \geq 0} h^j a_j \ \text{dans}\ S(\mathbb{R}^2, m)\ . \tag{2.14}$$

Nous appelons a_0 le symbole principal de a.

Soit $S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$ l'ensemble des symboles classiques dans $S(\mathbb{R}^2, m)$.

Définition 2.9 **(Support)**. — *Pour $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$, $p \sim \sum_{j \geq 0} h^j p_j$ soit*

$$\mathcal{S}upp(p) := \overline{\bigcup_j supp\,(p_j)}\ . \tag{2.15}$$

Si $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$ et $\mathcal{S}upp(p)$ est compact nous avons $p \sim \chi p$ dans $S(\mathbb{R}^2, m)$, si $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ est indépendant de h avec $\chi = 1$ dans un voisinage de $\mathcal{S}upp(p)$.

***Définition 2.10* (Composition)**. — *Il est possible de définir une application bilinéaire*

$$S(\mathbb{R}^2, m_1) \times S(\mathbb{R}^2, m_2) \to S(\mathbb{R}^2, m_1 m_2)$$
$$(p_1, p_2) \mapsto p_1 \# p_2 \tag{2.16}$$

par prolongement continu de l'application (bilinéaire) $\mathscr{S} \times \mathscr{S} \to \mathscr{S}$

$$(p_1 \# p_2)(x, \xi) := e^{\frac{ih}{2}\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)} \left(p_1(x,\xi) p_2(y,\eta)\right)|_{y=x, \eta=\xi} \ . \tag{2.17}$$

Nous avons l'équivalence asymptotique

$$(p_1 \# p_2)(x,\xi) \sim \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}((\frac{ih}{2}(D_\xi D_y - D_x D_\eta))^k p_1(x,\xi) p_2(y,\eta))|_{y=x,\eta=\xi} \ . \tag{2.18}$$

***Théorème 2.11* (Composition)**. — *Pour* $p_j \in S(\mathbb{R}^2, m_j)$, $p_j^w : \mathscr{S} \to \mathscr{S}\ , \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$, $j = 1, 2$, *nous avons*

$$p_1^w p_2^w = (p_1 \# p_2)^w : \mathscr{S} \to \mathscr{S}\ , \mathscr{S}' \to \mathscr{S}' \ . \tag{2.19}$$

Un résultat fondamental est le Théoréme de Calderón-Vaillancourt de la continuité L^2 :

Théorème 2.12. — *Si* $p \in S(\mathbb{R}^2, 1)$ *alors* p^w *est borné uniformément par rapport à* h $L^2 \to L^2$.

***Définition 2.13* (Ellipticité)**. — $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ *est elliptique si* $\exists C > 0$ *indépendant de* h *tel que*

$$|p(X)| \geq \frac{1}{C} m(X) \ , \quad \forall X \in \mathbb{R}^2 \ . \tag{2.20}$$

***Lemme 2.14* (Parametrix)**. — *Si* $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ *est elliptique, alors il existe un* $q \in S(\mathbb{R}^2, \frac{1}{m})$ *tel que*

$$p \# q = 1 + r_1 \in S(\mathbb{R}^2, 1), r_1 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^2, 1) \ ,$$
$$q \# p = 1 + r_2 \in S(\mathbb{R}^2, 1), r_2 \in S^{-\infty}(\mathbb{R}^2, 1) \ ,$$

donc

$$p^w q^w = 1 + R_1 \in \mathcal{L}(L^2), \|R_1\| = O(h^\infty) \ , \tag{2.21}$$
$$q^w p^w = 1 + R_2 \in \mathcal{L}(L^2), \|R_2\| = O(h^\infty) \ ,$$

***Théorème 2.15* (Inverse).** — *Si $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ est elliptique, alors il existe un $h_0 > 0$ tel que pour $h \in (0, h_0]$ il existe un $q \in S(\mathbb{R}^2, \frac{1}{m})$ tel que*

$$p\#q = q\#p = 1 \text{ dans } S(\mathbb{R}^2, 1) \ . \tag{2.22}$$

Ceci implique

$$p^w q^w = q^w p^w = 1_{L^2} \ . \tag{2.23}$$

La preuve de ce résultat important repose sur le lemme de Beals (voir par exemple [**5**]). Pour énoncer ce lemme, nous devons introduire, pour $A : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ (et $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$), $B : \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$,la notation

$$ad_A B := [A, B] : \mathscr{S} \to \mathscr{S}' \ . \tag{2.24}$$

***Lemme 2.16* (Lemme de Beals).** — *Soit $A_h : \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, $h \in (0, 1]$, tel que $\forall N \in \mathbb{N}$, pour toute suite $l_1(x, \xi), ..., l_N(x, \xi)$ de formes linéaires sur $\mathbb{R}^2$ nous avons :*

$$\|ad_{l_1(x,hD)} \circ ... \circ ad_{l_N(x,hD)} A_h\|_{L^2 \to L^2} = O(h^N) \ . \tag{2.25}$$

Alors $\exists a = a(x, \xi; h) \in S(\mathbb{R}^2, 1)$ tel que $A_h = a^w(x, hD; h)$.

2.3. Espaces locaux. —

***Définition 2.17*.** — *Soit U un ouvert dans $\mathbb{R}^2$, et soit m une fonction d'ordre. Introduisons l'espace « local »*

$$S(U, m) = \{p \in C^\infty(U);\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \forall A > 0, \quad \exists C_{\alpha,A} \text{ tel que}$$
$$|\partial_X^\alpha p|(X) \leq C_{\alpha,A} m(X), \forall X \in U,\ dist(X, U^c) \geq \frac{1}{A}\}. \tag{2.26}$$

Nous pouvons définir de manière analogue que dans le paragraphe précédent les espaces $S^k(U, m)$, ainsi que l'équivalence asymptotique, les symboles classiques et le support (définition 2.9).

Le lemme 2.7 reste valable dans $S(U, m)$.

De plus, avec (2.18), il est possible de définir une composition asymptotique

$$S(U, m_1) \times S(U, m_2) \to S(U, m_1 m_2)/S^{-\infty}(U, m_1 m_2) \ .$$

Remarquons qu'elle est associative.

***Définition 2.18* (Ellipticité à l'infini).** — *$p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ est elliptique à l'infini si $\exists C > 0$ indépendant de h tel que*

$$|p(X)| \geq \frac{1}{C} m(X) \ , \ |X| \geq C. \tag{2.27}$$

Lemme 2.19. — *Si $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$ est elliptique à l'infini, alors il existe un $q \in S_{cl}(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), \frac{1}{m})$ tel que*

$$q\#p \sim p\#q \sim 1 \ \textit{dans} \ S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), 1) \ . \tag{2.28}$$

Démonstration. — Nous avons, avec $\frac{1}{p} \in S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), \frac{1}{m})$,

$$\begin{aligned} & p\#\frac{1}{p} = 1 - hr, \ \frac{1}{p}\#p = 1 - h\tilde{r} \text{ dans } S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), 1) \ , \\ & r, \tilde{r} \in S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), 1). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Soit

$$S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), \frac{1}{m}) \ni q \sim \frac{1}{p}\#(\sum_{k\geq 0} h^k r^{\#^k}) \ , \tag{2.30}$$

et

$$S(\mathbb{R}^2 \setminus p_0^{-1}(0), \frac{1}{m}) \ni \tilde{q} \sim (\sum_{k\geq 0} h^k \tilde{r}^{\#^k})\#\frac{1}{p} \ . \tag{2.31}$$

Alors $p\#q \sim 1$, $\tilde{q}\#p \sim 1$ et, par l'associativité de la compositon asymptotique, nous avons

$$\tilde{q} \sim \tilde{q}\#(p\#q) \sim (\tilde{q}\#p)\#q \sim q \ . \tag{2.32}$$

□

2.4. Espaces de Sobolev « semiclassiques ». —

***Définition 2.20* (Espace de Sobolev)**. — *Soit $h_m > 0$ tel que $n^w = (m^w)^{-1}$ existe pour $h < h_m$ (théorème 2.15). Pour $h < h_m$, l'espace de Sobolev (de base L^2, correspondant à m) semiclassique est défini par*

$$H(m) := (m^w)^{-1}(L^2) \subset \mathscr{S}' \ , \tag{2.33}$$

que nous munissons de la norme

$$\|u\|_m := \|m^w u\| \ , \ u \in H(m) \ . \tag{2.34}$$

***Proposition 2.21* (Propriétés de $H(m)$)**. — *$(H(m), \|.\|_m)$ est un espace de Banach, et $\mathscr{S}$ est dense dans $H(m)$.*

Démonstration. — Nous choisirons partout h assez petit.

m^w est une isométrie surjective : $H(m) \to L^2$, donc $H(m)$ est un espace de Banach.

Par densité de $\mathscr{S}$ dans L^2 nous savons que $\forall u \in L^2$, $\exists u_j \in \mathscr{S}$ tel que $u_j \to u$ dans L^2. Soit alors, pour $v = (m^w)^{-1}u \in H(m), u \in L^2$, $v_j = (m^w)^{-1}u_j \in \mathscr{S}$. Nous avons alors que

$$\|v - v_j\|_m = \|u - u_j\| \to 0, j \to \infty \ . \tag{2.35}$$

$\square$

Pour des fonctions d'ordre $\tilde{m} \sim m$, nous avons, pour $h < \min\{h_m, h_{\tilde{m}}\}$, que $H(m)$ est égal à $H(\tilde{m})$ à une équivalence de normes près :

$$\forall u \in H(m),\ \frac{1}{C} \leq \frac{\|u\|_m}{\|u\|_{\tilde{m}}} \leq C\ , \tag{2.36}$$

où C est indépendant de h.

Remarquons aussi que $m \geq 1$ implique que $H(m) \subset L^2$.

Théorème 2.22. — *Pour $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$, p^w est continu $H(m) \to L^2$.*

Démonstration. — Observons que $p\#n \in S(\mathbb{R}^2, 1)$, donc son quantifié de Weyl est continu $L^2 \to L^2$. $v \in H(m)$ s'écrit $v = n^w u$ pour un $u \in L^2$ donc

$$p^w v = (p\#n)^w u \tag{2.37}$$

ce qui prouve le théorème avec la continuité L^2. $\square$

De manière analogue, nous avons aussi :

Théorème 2.23. — *Soit q une fonction d'ordre. Pour $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$, p^w est continu $H(q) \to H(\frac{q}{m})$.*

Proposition 2.24. — *L'espace dual de $H(m)$ est $H(\frac{1}{m})$.*

Démonstration. — Montrons d'abord que $H(\frac{1}{m}) \subset H(m)^*$.

Pour $u \in \mathscr{S}$, $w = m^w f \in H(\frac{1}{m})$, $f \in L^2$ nous avons

$$\langle w, u\rangle = \langle f, m^w u\rangle \leq C\|f\|\|u\|_m \tag{2.38}$$

donc tout $w \in H(\frac{1}{m})$ définit une forme linéaire continue (par rapport à la norme $\|.\|_m$) sur $\mathscr{S} \subset H(m)$. Par densité, nous pouvons la prolonger à $H(m)$ entier de manière unique. Avec (2.36), $\|w\|_{\frac{1}{m}} = \|(\frac{1}{m})^w w\|$ est uniformément équivalent à $\|f\| = \|(m^w)^{-1}w\|$, et nous avons

$$\|w\|_{H(m)^*} \leq C\|w\|_{\frac{1}{m}}\ . \tag{2.39}$$

Pour montrer l'inclusion inverse soit $\phi \in H(m)^*$. Alors pour $v = (m^w)^{-1}u \in H(m)$

$$\phi(v) = \phi((m^w)^{-1}u) =: \tilde{\phi}(u) \tag{2.40}$$

et $\tilde{\phi}$ est une fonctionelle linéaire continue sur L^2. Par le lemme de Riesz il existe un $f \in L^2$ tel que

$$\tilde{\phi}(u) = \langle u, f \rangle \tag{2.41}$$

avec $\|f\| = \|\phi\|_{H(m)^*}$, donc

$$\phi(v) = \langle v, m^w f \rangle,\ m^w f \in H(\frac{1}{m}) \ . \tag{2.42}$$

De plus,

$$\|m^w f\|_{\frac{1}{m}} \leq C\|f\| = C\|\phi\|_{H(m)^*} \ . \tag{2.43}$$

□

2.5. Propriété Fredholm de p^w. — Nous dénotons par $\mathfrak{R}(P)$ et $\mathfrak{N}(P)$ l'image et le noyau de l'opérateur P.

Proposition 2.25. — *Si $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$, p_0 vérifiant l'hypothèse 1.4, alors, pour h assez petit, $(p^w - z)$, $z \in \widetilde{\Omega}$ est une famille d'opérateurs de Fredholm $H(m) \to L^2$ d'indice 0.*

Démonstration. — Soit z_0 comme dans l'hypothèse 1.4 : $|p_0 - z_0| \geq \frac{1}{C}m$. Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ tel que $\chi = 1$ dans un voisinage de $p^{-1}(\overline{\widetilde{\Omega}})$. Soit

$$q(z) := \frac{\chi}{p_0 - z_0} + \frac{(1-\chi)}{p_0 - z} \in S(\mathbb{R}^2, \frac{1}{m}) \ . \tag{2.44}$$

Alors

$$\begin{aligned}(p-z)\#q(z) &= \chi\frac{p_0 - z}{p_0 - z_0} + (1-\chi) + hr_d = 1 - \frac{(z-z_0)}{p_0 - z_0}\chi + hr_d,\\ q(z)\#(p-z) &= \chi\frac{p_0 - z}{p_0 - z_0} + (1-\chi) + hr_g = 1 - \frac{(z-z_0)}{p_0 - z_0}\chi + hr_g \ ,\end{aligned}$$

où $r_d,\ r_g \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, 1)$. Pour h assez petit, nous pouvons invertir $(1 + hr_d^w)$ respectivement $(1 + hr_g^w)$ en tant qu'opérateur $L^2 \to L^2$, et le lemme de Beals (lemme 2.16) nous dit que l'inverse est un opérateur pseudo-différentiel de symbole $a \in S(\mathbb{R}^2, 1)$, respectivement $b \in S(\mathbb{R}^2, 1)$. Soit alors $q_d := q\#a$ et $q_g := b\#q$. Ceci donne

$$\begin{aligned}(p-z)\#q_d &= 1 - \left(\frac{(z-z_0)}{p_0 - z_0}\chi\right)\#a \ , \qquad (2.45)\\ q_g\#(p-z) &= 1 - b\#\left(\frac{(z-z_0)}{p_0 - z_0}\chi\right) \ .\end{aligned}$$

Or
$$\partial^\alpha(\left(\frac{(z-z_0)}{p_0-z_0}\chi\right)\#a)\to 0, |(x,\xi)|\to\infty, \forall\alpha\in\mathbb{N}^2\ , \tag{2.46}$$
donc son quantifié de Weyl est un opérateur compact $L^2\to L^2$ (voir par exemple [**?**]).

De plus, étant donné que $\chi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $b\#\left(\frac{(z-z_0)}{p_0-z_0}\chi\right)$ sera dans $S(\mathbb{R}^2,\tilde{m})$ pour tout $\tilde{m}$, donc (rappelons que $n^w=(m^w)^{-1}$)
$$\partial^\alpha(m\#b\#\left(\frac{(z-z_0)}{p_0-z_0}\chi\right)\#n)\to 0, |(x,\xi)|\to\infty, \forall\alpha\in\mathbb{N}^2\ , \tag{2.47}$$
dont le quantifié de Weyl est un opérateur compact $L^2\to L^2$. Ceci implique que $b\#\left(\frac{(z-z_0)}{p_0-z_0}\chi\right)$ est compact $H(m)\to H(m)$.

Nous avons donc que $(p^w-z)q_d^w=1+K_1$, K_1 compact, et $q_g^w(p^w-z)=1+K_2$, K_1, K_2 compacts. Ceci implique que (p^w-z) est Fredholm.

Pour $z=z_0$ comme dans l'hypothèse 1.4, nous avons aussi que $|p-z_0|>\frac{1}{2C}m$, uniformément en h pour h assez petit, donc (p^w-z_0) est inversible (d'inverse bornée). Il en découle que $\mathrm{ind}(p^w-z_0)=0$. La continuité en norme de
$$\widetilde{\Omega}\ni z\to p^w-z : H(m)\to L^2 \tag{2.48}$$
donne alors $\mathrm{ind}(p^w-z)=\mathrm{ind}(p^w-z_0)=0$ pour tout $z\in\widetilde{\Omega}$. □

3. Factorisation et quasimodes

Soit $p\in S_{cl}(\mathbb{R}^2,m)$, p_0 avec les hypothèses 1.4 et 1.3. Nous omettons dans la suite d'écrire l'indice j.

3.1. Théoréme de préparation de Malgrange.

— Nous avons besoin du théorème de factorisation locale de Malgrange pour des fonctions C^∞ (qui est l'analogue du théorème de Weierstrass pour des fonctions analytiques). Notons que la décomposition ne sera pas unique. Pour les preuves nous renvoyons à [**8**], tome 1.

Proposition 3.1. — *Soit U un entourage de 0 dans $\mathbb{R}^2$. Soit $f\in C^\infty(U)$ avec $f(0,0)=0$ et $\partial_\xi f(0,0)\neq 0$. Alors il existe un ouvert V, $0\in V\subset U$ tel que dans V nous avons la factorisation*
$$f(x,\xi)=q(x,\xi)(\xi+g(x)), \tag{3.1}$$
où g, q sont des fonctions C^∞ avec $q(0,0)\neq 0$, $g(0)=0$.

Ceci permettra déjà la factorisation des symboles principaux.

Théorème 3.2 **(Théorème de préparation de Malgrange)**
Soient f et U comme dans la proposition précédente. Alors il existe un ouvert V, $0 \in V \subset U$, tel que $\forall \tilde{f} \in C^\infty(U)$ il existe $q \in C^\infty(V)$, $a \in C^\infty(\pi_x(V))$ avec

$$\tilde{f}(x,\xi) = q(x,\xi)f(x,\xi) + a(x), \; (x,\xi) \in V \; . \tag{3.2}$$

Proposition 3.3. — *Soit $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$, p_0 remplissant l'hypothèse 1.3. Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $z \in \Omega$ dans un voisinage de z_0. Soient $U_\pm$ des entourages de $\rho_\pm(z_0)$. Alors il existe un ouvert $W(z_0)$ contenant z_0, des ouverts $V_\pm \subset U_\pm$ contenant $\rho_\pm(z)$, $z \in W(z_0)$, et des symboles*

$$q_\pm \sim \sum_{k\geq 0} q_{\pm,k}h^k \in S_{cl}(V_\pm, 1) \quad , g_\pm \sim \sum_{k\geq 0} g_{\pm,k}h^k \; , \; g_{\pm,k} \in C_b^\infty(\pi_x(V_\pm)) \tag{3.3}$$

qui dépendent de manière C^∞ de $z \in W(z_0)$ tels que

$$\begin{aligned} p(x,\xi;h) - z &\sim q_+(x,\xi,z;h)\#(\xi + g_+(x,z;h)) \text{ dans } S(V_+, m) \; , \\ p(x,\xi;h) - z &\sim (\xi + g_-(x,z;h))\#q_-(x,\xi,z;h) \text{ dans } S(V_-, m) \; , \end{aligned} \tag{3.4}$$

avec $q_{\pm,0}(\rho_\pm(z), z) \neq 0$, $g_{\pm,0}(x_\pm(z), z) = -\xi_\pm(z)$, $z \in W(z_0)$.

Démonstration. — Afin de simplifier les notations, nous omettons les indices $\pm$, et nous nous concentrons sur la première partie de (3.4).

Nous commençons par décomposer le symbole principal.

Avec $p_0(\rho(z)) - z = 0$, $(p_0)'_\xi(\rho(z)) \neq 0$ (hypothèse 1.3), nous obtenons dans un entourage $V \subset U$ de $\rho(z_0)$ des fonctions $q_0 \in C^\infty(V)$ et $g_0 \in C^\infty(\pi_x(V))$ telles que, dans V

$$(p_0(x,\xi) - z_0) = q_0(x,\xi)(\xi + g_0(x)) \tag{3.5}$$

avec $q_0(x(z_0), \xi(z_0)) \neq 0$, $g_0(x(z_0)) = -\xi(z_0)$. On peut rajouter z aux variables et nous avons toujours une dépendance C^∞ de z. Les equations ci-dessus sont alors valables pour $z \in W(z_0)$.

Ensuite nous regroupons par ordre de h les termes provenant de la formule de composition asymptotique :

$$\begin{aligned} p_N(x,\xi) = {} & q_0(x,\xi)g_N(x) + q_N(x,\xi)(\xi + g_0(x)) \\ & + \widetilde{G}_N(q_0, ..., q_{N-1}, g_0, ..., g_{N-1}, x, \xi, z) \; . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Etant donné que $q_0(x,\xi) \neq 0$, nous avons une équation de la forme

$$G_N(x,\xi) = \frac{q_N(x,\xi)}{q_0(x,\xi)}(g_0(x)+\xi) + g_N(x) \ , \tag{3.7}$$

où G_N ne dépend que des q_j, g_l pour $j,l < N$ et de p_N. Il est donc possible de déterminer les q_k, g_k inductivement, car avec

$$g_0(x(z)) + \xi(z) = 0, \quad \partial_\xi(g_0(x)+\xi) = 1, \tag{3.8}$$

le théorème de Malgrange nous prouve l'existence d'un ouvert V contenant $\rho(z_0)$, des fonctions C^∞ $\frac{q_N}{q_0}$ (ce qui donne q_N) et g_N dans C^∞ avec les propriétés voulues. En prolongeant si nécessaire q_N et g_N à un ouvert légèrement plus grand, nous pouvons obtenir le même ouvert V pour chaque N.

En itérant la procédure pour chaque ordre de h, nous obtenons les solutions formelles

$$q \sim \sum_{k\geq 0} q_k h^k \ , \ q_k \in C^\infty(V) \tag{3.9}$$

et

$$g \sim \sum_{k\geq 0} g_k h^k \ , \ g_j \in C^\infty(\pi_x(V)) \ . \tag{3.10}$$

La même procédure peut être appliquée pour obtenir une factorisation à gauche, ce qui montre la deuxième affirmation. □

Nous choisissons un représentant de $g_\pm \in C^\infty$ et prolongeons $g_\pm$ dans $C^\infty(\mathbb{R})$ tel que

$$g_\pm(y) = \mp\frac{i}{C_\pm}(y - x_\pm), \ |y| \geq C \ , \ C_\pm > 0 \ , \tag{3.11}$$

et obtenons ainsi un représentant global.

Pour $\chi_\pm \in C_c^\infty(V_\pm)$, ceci donne

$$\begin{aligned} \chi_+\#(p-z) &\sim (\chi_+\#q_+)\#(\xi+g_+) \ , \\ (p-z)\#\chi_- &\sim (\xi+g_-)\#(q_-\#\chi_-) \ , \end{aligned} \tag{3.12}$$

les compositions étant au sens asymptotique dans les espaces locaux.

3.2. Quasimodes. —

3.2.1. Quasimode pour $P-z$. — Nous construisons d'abord une solution de l'équation

$$(hD_x + g_+(x,z;h))e_+ = 0 \tag{3.13}$$

de la forme

$$e_+(x,z;h) := a_+(x,z;h)e^{\frac{i}{h}\varphi_+(x,z)} \ , \|e_+\| = 1 \ , \tag{3.14}$$

avec une phase $\varphi_+ \in C^\infty$ indépendante de h, $\mathrm{Im}\,\varphi_+ \geq 0$, et une amplitude admettant un développement asymptotique en puissances de h :

$$a_+(x,z;h) \sim \sum_{j\geq 0} a_{+,j}(x,z)h^j \text{ dans } C_b^\infty(\mathbb{R}) \ , \forall z \in \Omega \ . \tag{3.15}$$

La phase doit remplir l'équation eikonale

$$\varphi_+'(x,z) + g_{+,0}(x,z) = 0 \ . \tag{3.16}$$

qui admet une solution unique si nous imposons $\varphi_+(x_+,z) = 0$. Etant donné que $\varphi_+'(x_+) = \xi_+$, nous voyons que c'est le signe du crochet de Poisson qui détermine le signe de la partie imaginaire de la phase près de x_+ :

$$\mathrm{Im}\,\varphi_+''(x_+,z) = -\mathrm{Im}\,g_{+,0}'(x_+,z) = \frac{1}{2i|q_{+,0}|^2}\{p_0,\overline{p_0}\}(\rho_+) \ . \tag{3.17}$$

Près de ρ_+, le crochet est positif, donc la partie imaginaire de la phase est positive ; grâce au choix du prolongement de g_+, ceci restera vrai globalement :

$$\mathrm{Im}\,\varphi_+(x) \sim \frac{1}{C_+}(x-x_+)^2, \quad |x| \to \infty \ . \tag{3.18}$$

Ensuite, afin de déterminer l'amplitude, nous regroupons les termes du même ordre de h et obtenons une série d'*équations de transport* :

$$a_{+,0}' = 0 \ , \ -ia_{+,l}' + \sum_{0\leq j\leq l-1} g_{+,l-j}a_{+,j} = 0, \ l > 0. \tag{3.19}$$

Celles-ci déterminent les dérivées de $a_{+,k}$ récursivement, qui seront à support compact, donc a_+ sera constant en dehors du support de $(g_+ - i\mathrm{Im}\,g_{+,0})$. Il est ainsi possible de normaliser e_+ dans L^2, ce qui détermine les constantes $a_{+,j}(x_+)$ par la méthode de la phase stationnaire.

Remarquons que nous avons aussi

$$e_+(x,z,h) = c(z;h)e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^x g_+(y,z,h)dy} =: c(z;h)e^{\frac{i}{h}\varphi_{+,h}(y,z,h)} \ , \tag{3.20}$$

mais nous avons préféré rester proche du formalisme BKW.

Lemme 3.4. — *Il existe* $e_+ \in \mathscr{S}$, $\|e_+\| = 1$, *tel que*

$$\|(p^w - z)e_+\| = O(h^\infty) \ . \tag{3.21}$$

Pour prouver le lemme, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.5. — *Pour toute fonction d'ordre* m' *(et* $h < h_{m'}$*),* $e_+ \in H(m')$ *et pour tout* $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$*,* $\chi = 1$ *près de* ρ_+*,*

$$\|(1-\chi)^w e_+\|_{m'} = O(h^\infty) \ . \tag{3.22}$$

Preuve du lemme 3.4. — Par construction, e_+ est normalisé dans L^2. Nous avons, avec le lemme 3.5,

$$\begin{aligned}(p^w - z)e_+ &= (p^w - z)\chi^w e_+ + O(h^\infty) \\ &= \chi^w (p^w - z)e_+ + [p^w, \chi^w]e_+ + O(h^\infty) \ .\end{aligned}$$

Le premier terme est $O(h^\infty)$ avec la factorisation par construction. Pour le terme de commutateur observons que

$$\mathcal{S}upp(p\#\chi - \chi\#p) \subset \operatorname{supp} \chi' \ , \tag{3.23}$$

ce qui est disjoint d'un voisinage de ρ_+. En appliquant le lemme 3.5, nous voyons que ce terme sera aussi $O(h^\infty)$. □

Preuve du lemme 3.5. — Nous présentons ici une preuve de J. Sjöstrand. Nous avons

$$hD_x + g_+ = (\xi + g_+)^w, \ \xi + g_+ \in S(\mathbb{R}^2, \langle(\xi, x)\rangle) \ . \tag{3.24}$$

Pour h assez petit, $\xi + g_+$ est elliptique en dehors de ρ_+. Puisque

$$(hD_x + g_+)e_+ = 0, \ \|e_+\| = 1 \ , \tag{3.25}$$

nous avons

$$(hD_x + \overline{g_+})(hD_x + g_+)e_+ = 0 \ . \tag{3.26}$$

Soit $\Psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, (0,1))$, $\Psi = 1$ près de ρ_+. Soit

$$Q^w = (hD_x + \overline{g_+})(hD_x + g_+) + \Psi^w \ . \tag{3.27}$$

Alors

$$Q(x,\xi) = |\xi + g_{+,0}|^2 + \Psi + O(h) \in S(\mathbb{R}^2, \langle(\xi, x)\rangle^2) \tag{3.28}$$

est elliptique, h assez petit, et (avec le lemme 2.16), Q^w admet, pour h assez petit, un inverse borné R^w, $R \in S(\mathbb{R}^2, \langle(\xi, x)\rangle^{-2})$. De plus, d'après (3.26),

$$Q^w e_+ = \Psi^w e_+ \ , \tag{3.29}$$

donc pour toute fonction d'ordre m',

$$e_+ = (R\#\Psi)^w e_+ \in H(m') \ . \tag{3.30}$$

Nous choisissons maintenant, pour χ comme dans le lemme 3.5, $\Psi \prec \chi$ (ce qui veut dire que $\mathrm{supp}\,(\Psi) \cap \mathrm{supp}\,(1-\chi) = \emptyset$). Alors pour toute fonction d'ordre m',

$$(1-\chi)\#R\#\Psi = O(h^\infty) \text{ dans } S(\mathbb{R}^2, \frac{1}{m'}) \ , \tag{3.31}$$

et $\|(1-\chi)^w e_+\|_{m'} = O(h^\infty)$. $\square$

3.2.2. Quasimode pour $(P-z)^*$. — Nous construisons d'abord une solution de l'équation

$$(hD_x + g_-(x,z;h))^* e_- = 0 \tag{3.32}$$

de la forme

$$e_-(x,z;h) := a_-(x,z;h) e^{\frac{i}{h}\varphi_-(x,z)} \ , \|e_-\| = 1 \ , \tag{3.33}$$

avec une phase $\varphi_- \in C^\infty$ indépendante de h, $\mathrm{Im}\,\varphi_- \geq 0$, et une amplitude admettant un développement comme dans (3.15).

La phase doit remplir l'équation eikonale

$$\varphi_-'(x,z) + \overline{g_{-,0}}(x,z) = 0 \ , \tag{3.34}$$

qui admet une solution unique si nous imposons $\varphi_-(x_-, z) = 0$. Etant donné que $\varphi_-'(x_-) = \xi_-$, nous voyons que c'est le signe du crochet de Poisson qui détermine le signe de la partie imaginaire de la phase près de x_- :

$$\mathrm{Im}\,\varphi_-''(x_-,z) = \mathrm{Im}\, g_{-,0}'(x_-,z) = -\frac{1}{2i|q_{-,0}|^2}\{p_0, \overline{p_0}\}(\rho_-) > 0 \ . \tag{3.35}$$

Grâce au choix du prolongement de g_-, nous avons :

$$\mathrm{Im}\,\varphi_-(x) \sim \frac{1}{C_-}(x-x_-)^2, \quad |x| \to \infty \ . \tag{3.36}$$

Ensuite nous pouvons résoudre les équations de transport, et il est possible de normaliser e_- dans L^2, ce qui détermine les constantes $a_{-,j}(x_-)$ par la méthode de la phase stationnaire.

Lemme 3.6. — *Il existe $e_- \in \mathscr{S}$, $\|e_-\| = 1$, tel que*

$$\|(p^w - z)^* e_-\| = O(h^\infty) \ . \tag{3.37}$$

Démonstration. — Nous avons l'analogue du lemme 3.5, et pouvons utiliser la factorisation

$$\chi_-^w(p^w - z)^* = (\chi_- \# \overline{q_-})^w (hD_x + g_-)^* + O(h^\infty) \ . \tag{3.38}$$

□

Lemme 3.7. — *Pour toute fonction d'ordre m' (et $h < h_{m'}$), et pour tout $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\chi = 1$ près de $(x_-, 2\xi_-)$,*

$$\|(1-\chi)^w (e_-)^2\|_{m'} = O(h^\infty) \ . \tag{3.39}$$

Démonstration. — Nous avons

$$(hD_x + 2\overline{g_-})(e_-)^2 = 2\big((hD_x + \overline{g_-})e_-\big)e_- = 0 \ . \tag{3.40}$$

Donc le lemme 3.5 s'applique aussi ici, et avec

$$|\xi + 2\overline{g_-}(x_-)| \geq \frac{1}{C}(|\xi - 2\xi_-| + |x - x_-|) \ , \tag{3.41}$$

nous obtenons le lemme. □

4. Enoncé et résolution asymptotique du problème de Grushin

4.1. Problème de Grushin. — La question d'inversibilité de $P - z$ peut être reformulée grâce au problème de Grushin associé.

Définition 4.1. — *Soit*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p^w - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C} \to L^2 \times \mathbb{C}$$

où $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ remplit les hypothèses 1.3 pour $n = 1$ et 1.4, et où

$$R_+ u := \langle u, e_+ \rangle \ ,$$
$$R_- u_- := u_- e_- \ .$$

Proposition 4.2. — *Supposons que $\mathcal{P}$ admet un inverse de la forme*

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} : L^2 \times \mathbb{C} \to H(m) \times \mathbb{C} \ .$$

Alors $p^w - z$ admet un inverse borné ssi $E_{-+} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est inversible.

La preuve se trouve par exemple dans [**6**].

Explicitons comment on peut généraliser cette proposition au cas d'un nombre n de couples $\rho_\pm$: pour chaque $\rho_\pm^j$ nous obtenons une fonction $e_\pm^j$ associée comme dans les lemmes 3.4, 3.6.

Définition 4.3. — *Soit*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p^w - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C}^n \to L^2 \times \mathbb{C}^n$$

où $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ remplit les hypothèses 1.3 et 1.4, et où

$$\begin{aligned} (R_+ u)_j &:= \langle u, e_+^j \rangle \ , \\ R_- u_- &:= \sum_k u_-^k e_-^k \ . \end{aligned}$$

Alors la proposition 4.2 reste valable et E_{-+} sera une matrice $n \times n$: l'inversiblité de $p^w - z$ sera donc équivalente à $\det E_{-+} \neq 0$.

Une fois que l'inverse du problème de Grushin est construit, le problème spectral est réduit à déterminer les zéros de $\det(E_{-+})$.

Dans notre cas, la construction de l'inverse du problème de Grushin va être facilitée grâce à la proposition 2.25 et au résultat suivant.

Proposition 4.4. — *Si $(p^w - z)$, pour $(p - z) \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$, est une famille d'opérateurs de Fredholm d'indice 0, $\forall z \in \widetilde{\Omega}$, alors $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(z)$ est aussi un opérateur de Fredholm d'indice 0, $\forall z \in \widetilde{\Omega}$.*

Ainsi l'existence d'un inverse à droite de $\mathcal{P}$ impliqe l'inversibilité de $\mathcal{P}$.

Démonstration. — Considérons pour $t \in [0, 1]$

$$\mathcal{P}^t = \begin{pmatrix} P - z & tR_- \\ tR_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C}^n \to L^2 \times \mathbb{C}^n$$

Pour $t = 0$, $\mathcal{P}^0$ est un opérateur de Fredholm et $\mathrm{ind}\mathcal{P}^0 = \mathrm{ind}(p^w - z) = 0$. Etant donné que R_+ et R_- sont des opérateurs de rang fini, $\mathcal{P}^t$ est un opérateur de Fredholm, et $\mathrm{ind}(\mathcal{P}^t)$ est constant pour $t \in [0, 1]$, donc $\mathrm{ind}(\mathcal{P}) = \mathrm{ind}(\mathcal{P}^1) = 0$. □

Proposition 4.5. — *Soit $p \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, m)$, p_0 remplissant les hypothèses 1.3 et 1.4. Alors p^w a un spectre purement discret dans $\widetilde{\Omega}$, consistant de valeurs propres (isolées) de multiplicité finie.*

Démonstration. — Nous suivons [**7**].

Soit, d'après l'hypothése 1.4, $z_0 \in \widetilde{\Omega}$ tel que $p^w - z_0$ est inversible.

Soit $z_1 \in \widetilde{\Omega}$. Nous savons que $(p^w - z_1)$ est Fredholm, $\mathrm{ind}(p^w - z_1) = 0$; soit $N = \dim \mathfrak{N}(p^w - z_1) = \dim \mathfrak{R}(p^w - z_1)^{\perp}$. Considérons le probléme de Grushin

$$\mathcal{P}_z := \begin{pmatrix} p^w - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C}^N \to L^2 \times \mathbb{C}^N$$

où R_+ et R_- sont de rang maximal et

$$R_+|_{\mathfrak{N}(p^w - z_1)} \text{ est bijectif },$$
$$\mathfrak{R}(R_-) \perp \mathfrak{R}(p^w - z_1) .$$

Alors $\mathcal{P}_{z_1}$ est bijectif avec un inverse borné $\mathcal{E}(z_1)$, donc dans un voisinage $V(z_1)$ de z_1, $\mathcal{P}_z$ aura un inverse borné $\mathcal{E}(z)$ dont les entrées dépendent holomorphiquement de z. Donc soit $\det E_{-+}(z)$ est identiquement nul $\forall z \in V(z_1)$, soit ses zéros dans $V(z_1)$ forment un ensemble discret.

Nous pouvons maintenant prolonger $E_{-+}(z)$ le long d'un chemin reliant z_1 à z_0 (en écrivant le problème de Grushin dans un nombre fini de disques recouvrant ce chemin). Etant donné que $\det E_{-+}(z_0) \neq 0$ (car $p^w - z_0$ est inversible), $\det E_{-+}(z)$ ne peut être identiquement nul dans aucun des disques utilisés lors de la prolongation (par identité sur l'intersection des disques).

Ceci étant valable pour tout $z_1 \in \widetilde{\Omega}$, les zéros de $\det E_{-+}$ (correspondant au spectre de p^w) sont isolés. Pour prouver que l'espace propre correspondant à z_1 est de dimension finie, nous renvoyons à [**7**]. $\square$

4.2. Résolution des problèmes locaux. — Nous posons $n = 1$, mais etant donné que nous énonçons des résultats locaux, tout se généralisera à $n > 1$.

4.2.1. Parametrix. — Commençons par la construction d'une parametrix sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\rho_+, \rho_-\}$, où p est elliptique : les zéros de $p_0 - z$ se situent précisément en $\rho_\pm$ et $p - z$ est elliptique à l'infini, $z \in \widetilde{\Omega}$. Il est donc possible d'appliquer le lemme 2.19 pour obtenir $M \in S(\mathbb{R}^2 \setminus \{\rho_+, \rho_-\}, \frac{1}{m})$ tel que

$$(p - z) \# M \sim 1 \text{ dans } S(\mathbb{R}^2 \setminus \{\rho_+, \rho_-\}, 1) . \tag{4.1}$$

4.2.2. Résolution pour $P = hD_x + g_+(x)$. —

Proposition 4.6. — *Pour $P = hD_x + g_+(x)$, $v \in L^2(\mathbb{R})$, $v_+ \in \mathbb{C}$ le problème*

$$\begin{cases} Pu = v \\ R_+ u = v_+ \end{cases} \tag{4.2}$$

avec

$$R_+ u := \langle u, e_+ \rangle \tag{4.3}$$

admet une solution unique

$$u = Fv + F_+v_+ \in H_{sc} = H(\langle\langle(x,\xi)\rangle\rangle) \ , \tag{4.4}$$

$F_+v_+ := v_+e_+$, *et nous avons*

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^2\to H_{sc}} &= O(h^{-\frac{1}{2}}) \ , \\ \|F_+\|_{\mathbb{C}\to H_{sc}} &= O(1) \ . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Démonstration. — La preuve est similaire à celle dans [**6**]. Nous reprenons les étapes non-techniques.

L'équation homogène

$$\begin{cases} Pu = 0 \\ R_+u = v_+ \end{cases} \tag{4.6}$$

admet la solution unique

$$u = F_+v_+ \ , \tag{4.7}$$

alors que

$$\begin{cases} Pu = v \\ R_+u = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

admet la solution

$$u = Fv := (1 - F_+R_+)\tilde{F}v \ , \tag{4.9}$$

avec $R_+u = 0$ et où $\tilde{F}$ sera defini par la suite.

En supposant $x_+ = 0$ pour alléger les notations, $\tilde{F}$ admet un noyau intégral

$$k(x,y) = \frac{i}{h}\ e^{-\frac{i}{h}\ \int_y^x g_+(\tilde{x})d\tilde{x}}\ 1_{\{x_+\le y\le x\}}\ - \frac{i}{h}\ e^{-\frac{i}{h}\ \int_y^x g_+(\tilde{x})d\tilde{x}}\ 1_{\{x\le y\le x_+\}}\ ,$$

et $P\tilde{F}v = v$. Par le lemme de Schur (cf. [**8**], tome 3) la norme L^2 de $\tilde{F}$ est majorée par

$$\left(\sup_x \int |k(x,y)|dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sup_y \int |k(x,y)|dx\right)^{\frac{1}{2}} \ . \tag{4.10}$$

En utilisant et adaptant les estimations de la preuve dans [**6**], nous avons, en utilisant aussi l'identité $(hD_x + g_+)\tilde{F}w = w$,

$$\begin{aligned} &\|\tilde{F}\| \le \frac{C}{\sqrt{h}}\ ,\ \|x\tilde{F}\| \le \frac{C'}{\sqrt{h}}\ , \\ &\|hD_x\tilde{F}\| \le \|1 - g_+(x)\tilde{F}\| \le \|\tilde{F}\| + C\|x\tilde{F}\| \le \frac{C''}{\sqrt{h}}\ . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Avec $\|F_+R_+\| = O(1)$, nous avons les mêmes estimations pour F, ce qui implique

$$\|F\|_{L^2\to H_{sc}} = \|F\| + \|hD_xF\| + \|xF\| \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{h}} \ . \tag{4.12}$$

$\square$

Lemme 4.7. — *(Non-propagation des supports)*

Pour $\psi_1, \psi_2 \in S(\mathbb{R}^2, 1)$ indépendants de h et à supports disjoints nous avons

$$\psi_1^w F \psi_2^w = O(h^\infty) \ \textit{dans} \ \mathcal{L}(L^2, H_{sc}) \ . \tag{4.13}$$

Ceci implique que nous avons le même résultat pour $\psi_j \in S_{cl}(\mathbb{R}^2, 1)$ tels que $\mathcal{S}upp\psi_1 \cap \mathcal{S}upp\psi_2 = \emptyset$, car nous pouvons, en chaque ordre de h, appliquer le lemme précédent.

Démonstration. — Soit $P = hD_x + g_+(x) = p^w$.

Soient χ , $\tilde{\chi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\chi \prec \tilde{\chi}$, $\chi = 1$ près de ρ_+. Considérons

$$P\tilde{\chi}^w F\chi^w v = [P, \tilde{\chi}^w]F\chi^w v + \chi^w v + O(h^\infty)v \ , \tag{4.14}$$

$$\|R_+\tilde{\chi}^w F\chi^w v - R_+F\chi^w v\| = O(h^\infty)\|v\|. \tag{4.15}$$

$\mathcal{S}upp(p\#\chi - \chi\#p)$ est disjoint de ρ_+. Comme dans la preuve du lemme 3.5, nous avons

$$|\xi + g_{+,0}|^2 \geq \frac{1}{C}\left((\xi - \xi_+)^2 + (x - x_+)^2\right) \ , \tag{4.16}$$

donc il existe $q \in S(\mathbb{R}^2 \backslash \rho_+, \frac{1}{\langle (x,\xi)\rangle})$ tel que

$$p\#q \sim 1 \text{ dans } S(\mathbb{R}^2 \backslash \rho_+, 1) \ . \tag{4.17}$$

Soit $q\#(1-\chi)$ un représentant du composé asymptotique, et soit

$$F' := (q\#(1-\chi))^w + \tilde{\chi}^w F\chi^w - (q\#(p\#\tilde{\chi} - \tilde{\chi}\#p))^w F\chi^w \ . \tag{4.18}$$

Alors

$$\begin{aligned} &PF'v = v + r_1(v) \ , \ \|r_1\| = O(h^\infty) \ , \\ &R_+F'v = r_2(v) \ , \ \|r_2\|_{L^2\to\mathbb{C}} = O(h^\infty) \ . \end{aligned} \tag{4.19}$$

L'unicité dans la proposition 4.6 implique alors que

$$F'v = Fv + Fr_1(v) + F_+r_2(v) =: Fv - R_3v \ , \tag{4.20}$$

où $R_3 : L^2 \to H_{sc}$, $\|R_3\|_{L^2\to H_{sc}} = O(h^\infty)$.

Nous avons donc, pour $\psi_1, \psi_2 \in S(1)$ à supports disjoints

$$\psi_2^w F\psi_1^w = \psi_2^w F'\psi_1^w + O(h^\infty) \tag{4.21}$$

et il suffit de montrer l'affirmation pour F'.

Le premier terme dans F' est un opérateur pseudodifférentiel à symbole dans $S(\mathbb{R}^2, \frac{1}{\langle (x,\xi)\rangle})$, donc

$$\psi_2^w (q\#(1-\chi))^w \psi_1^w = O(h^\infty) : L^2 \to H_{sc} \tag{4.22}$$

Pour les deux termes restants, nous distinguons les cas :

$\rho_+ \notin \operatorname{supp}\psi_2$: alors $\psi_2^w \tilde{\chi}^w = O(h^\infty)$ et $\psi_2^w [P, \tilde{\chi}^w] = O(h^\infty)$ pour $\tilde{\chi}$ assez localisée, donc $\psi_2^w F' \psi_1^w = O(h^\infty) : L^2 \to H_{sc}$ (car $F = O(\frac{1}{\sqrt{h}}) : L^2 \to H_{sc}$).

$\rho_+ \notin \operatorname{supp}\psi_1$: alors $\chi^w \psi_1^w = O(h^\infty)$ pour χ assez localisée, donc $\psi_2^w F' \psi_1^w = O(h^\infty) : L^2 \to H_{sc}$. □

4.2.3. Résolution pour $P = hD_x + g_-(x)$. — Ici nous avons la situation analogue pour l'adjoint formel.

Proposition 4.8. — *Pour $P = hD_x + g_-(x)$, $v \in L^2$ le problème*

$$Pu + R_- u_- = v \ , \tag{4.23}$$

avec

$$R_- u_- := u_- e_- \ , \ u_- \in \mathbb{C} \ ,$$

admet une solution unique dans $H_{sc} \times \mathbb{C}$, donnée par

$$u = Gv \ , \tag{4.24}$$

$$u_- = G_- v := \langle v, e_- \rangle \ , \tag{4.25}$$

avec

$$\|G\|_{L^2 \to H_{sc}} \leq \frac{C}{\sqrt{h}} \ . \tag{4.26}$$

Démonstration. — Pour $x \leq x_-$ nous avons la solution à $(hD_x + g_-)u = \tilde{v}$

$$u_1(x) = \frac{i}{h} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{i}{h} \ \int_y^x (g_-(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} \tilde{v}(y) dy =: \tilde{G}_1 \tilde{v}(x) \ ,$$

alors que pour $x \geq x_-$ nous avons

$$u_2(x) = \frac{i}{h} \int_{\infty}^{x} e^{-\frac{i}{h} \ \int_y^x (g_-(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} \tilde{v}(y) dy =: \tilde{G}_2 \tilde{v}(x) \ ,$$

les deux exposants étant décroissants (à partie réelle strictement négative loin de x_-) dans le domaine d'intégration .

Afin d'obtenir une solution continue, il faut imposer que

$$\begin{aligned}
0 = u_1(x_-) - u_2(x_-) &= \frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{h}\ \int_y^{x_-}(g_-(\tilde{x})-z)d\tilde{x}}\tilde{v}(y)dy\ , \\
&= \frac{i}{ha_-(x_-,z;h)}\langle \tilde{v}, e_-\rangle
\end{aligned} \tag{4.27}$$

donc, avec

$$u_- = G_- v\ ,$$

on peut prendre $\tilde{v} = v - R_- u_-$, car par construction

$$\langle v - R_- u_-, e_-\rangle = 0\ .$$

Nous avons alors la solution

$$\begin{aligned}
u &= Gv = \tilde{G}(I - R_- G_-)v\ , \\
u_- &= G_- v\ ,
\end{aligned}$$

où $\tilde{G}$ est donné par $\tilde{G}_{1/2}$ dans les zones correspondantes.

En observant que $\tilde{G}$ a le noyau intégral

$$k(x,y) = \frac{i}{h}\ e^{-\frac{i}{h}\ \int_y^x g_-(\tilde{x})d\tilde{x}}\ 1_{\{y\le x\le x_-\}}\ - \frac{i}{h}\ e^{-\frac{i}{h}\ \int_y^x g_-(\tilde{x})d\tilde{x}}\ 1_{\{x_-\le x\le y\}}\ ,$$

qui s'estime de la même manière que le noyau intégral de F (en remarquant que $\operatorname{Im} g_+'(x_+) \sim -\operatorname{Im} g_-'(x_-)$) nous pouvons utiliser les estimations du paragraphe précédent pour trouver que

$$\|\tilde{G}\|_{L^2\to L^2} \le \frac{C}{\sqrt{h}} \tag{4.28}$$

ainsi que

$$\|G\|_{L^2\to H_{sc}} \le \frac{C}{\sqrt{h}}\ . \tag{4.29}$$

□

Lemme 4.9. — *(Non-propagation des supports)*

Pour $\psi_1, \psi_2 \in S(1)$ indépendants de h et à supports disjoints nous avons

$$\psi_1^w G \psi_2^w = O(h^\infty)\ \textit{dans}\ \mathcal{L}(L^2, H_{sc})\ . \tag{4.30}$$

La preuve est analogue à celle du paragraphe précédent.

4.3. Recollement des morceaux et inverse. — La prochaine étape sera de recoller les solutions afin d'obtenir un inverse à droite approximatif sur tout l'espace.

Soient $U_\pm \subset \mathbb{R}^2$ des entourages de $\rho_\pm$ à adhérences disjointes ,

$$\chi_\pm \in C_c^\infty(U_\pm) \text{ indépendantes de } h,\ \chi_\pm = 1 \text{ près de } \rho_\pm \ , \tag{4.31}$$

et $\chi := (1 - \chi_+ - \chi_-) \in S(\mathbb{R}^2, 1)$.

Nous décomposons $L^2 \ni v \sim \chi_+^w v + \chi_-^w v + \chi^w v$ pour résoudre le problème de Grushin grâce aux inverses des paragraphes précédants.

Soient $\chi_\pm \prec \tilde{\chi}_\pm \in C_c^\infty(U_\pm)$, $\chi \prec \tilde{\chi} \in S(\mathbb{R}^2, 1)$, $\tilde{\chi} = 0$ près de $\rho_\pm$, et soient $T_\pm \in S_{cl}(U_\pm, 1)$ tels que

$$Q_+ \# T_+ \sim 1 \text{ dans } S(U_+, 1) \ , \tag{4.32}$$
$$T_- \# Q_- \sim 1 \text{ dans } S(U_-, 1) \ . \tag{4.33}$$

Nous désignons par

$$T_+ \# \chi_+ \in C_c^\infty(U_+) \ , \tag{4.34}$$
$$\tilde{\chi}_- \# T_- \in C_c^\infty(U_-) \ , \tag{4.35}$$

des représentants à support compact des composés asymptotiques. Ceci implique qu'ils seront continus $L^2 \to H(n)$ pour toute fonction d'ordre n.

Soit M la parametrix dans la zone elliptique, et soit $M \# \chi$ un représentant du composé asymptotique dont le support est contenu dans un entourage du support de χ.

Proposition 4.10. — *Soit $\mathcal{P}$ comme dans la définition 4.1, où p remplit les hypothèses 1.3 pour $n = 1$ et 1.4. Soit*

$$\mathcal{E}_0 := \begin{pmatrix} E_0 & F_+ \\ G_- & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{4.36}$$

où

$$E_0 = (\tilde{\chi} \# M \# \chi)^w + \tilde{\chi}_+^w F (T_+ \# \chi_+)^w + (\tilde{\chi}_- \# T_-)^w G \chi_-^w \ = O(\frac{1}{\sqrt{h}}). \tag{4.37}$$

Alors

$$\mathcal{P}\mathcal{E}_0 = 1 - K \tag{4.38}$$

avec $K = O(h^\infty)$ dans $\mathcal{L}(L^2 \times \mathbb{C}, L^2 \times \mathbb{C})$.

Démonstration. — L'estimation de norme de E_0 découle directement des estimations établies pour les problèmes locaux.

Commençons par :

$$(p-z)\#\tilde{\chi}\#M\#\chi = \tilde{\chi}\#(p-z)\#M\#\chi + r = \chi + r' \ . \tag{4.39}$$

Nous avons $r \in S^{-\infty}(1)$, car

$$\mathcal{S}upp((p-z)\#\tilde{\chi} - \tilde{\chi}\#(p-z)) \subset \operatorname{supp}\tilde{\chi}' \tag{4.40}$$

est disjoint de $\operatorname{supp}(M\#\chi)$. Ceci implique, avec $\tilde{\chi}\#\chi \sim \chi$ dans S(1), que nous avons aussi $r' \in S^{-\infty}(1)$. Il en découle que $r'^w = O(h^\infty)$ dans $\mathcal{L}(L^2)$.

Ensuite, en utilisant le lemme 4.7 et la remarque d'après,

$$\begin{aligned}(P-z)\tilde{\chi}_+^w F(T_+\#\chi_+)^w &= [P,\tilde{\chi}_+^w]F(T_+\#\chi_+)^w + \tilde{\chi}_+^w(P-z)F(T_+\#\chi_+)^w \\ &= O(h^\infty) + (\tilde{\chi}_+\#Q_+)^w(hD_x + g_+(x))F(T_+\#\chi_+)^w \\ &= \chi_+^w + O(h^\infty)\end{aligned}$$

dans $\mathcal{L}(L^2)$.

Finalement, en utilisant le lemme 4.9 et que $G_- \sim G_-\chi_-$,

$$\begin{aligned}&(P-z)(\tilde{\chi}_-\#T_-)^w G\chi_-^w + R_-G_- \\ &= (hD_x + g_-(x))(Q_-\#\tilde{\chi}_-\#T_-)^w G\chi_-^w + R_-G_- + O(h^\infty) \\ &= (hD_x + g_-(x))G\chi_-^w + O(h^\infty) + R_-G_-\chi_-^w \\ &= \chi_-^w + O(h^\infty)\end{aligned}$$

dans $\mathcal{L}(L^2)$.

Au total

$$\begin{aligned}&(P-z)\big((\tilde{\chi}\#M\#\chi)^w + \tilde{\chi}_+^w F(T_+\#\chi_+)^w + (\tilde{\chi}_-\#T_-)^w G\chi_-^w\big) + R_-G_- \\ &= 1 + O(h^\infty)\end{aligned} \tag{4.41}$$

dans $\mathcal{L}(L^2)$.

Ensuite, le lemme 3.4 implique

$$\begin{aligned}&(P-z)F_+ = O(h^\infty) \ , \\ &R_+F_+ = 1 \ .\end{aligned}$$

Grâce au lemme 3.5

$$\begin{aligned}&R_+\big((\tilde{\chi}\#M\#\chi)^w + \tilde{\chi}_+^w F(T_+\#\chi_+)^w + (\tilde{\chi}_-\#T_-)^w G\chi_-^w\big) \\ &= R_+\tilde{\chi}_+^w F(T_+\#\chi_+)^w + O(h^\infty) \\ &= R_+F(T_+\#\chi_+)^w + O(h^\infty) = O(h^\infty)\end{aligned}$$

et la proposition est prouvée. $\square$

Il est possible, pour h assez petit, de trouver un inverse à droite exact de $\mathcal{P}$ en inversant $1-K$ avec une série de Neumann :

$$\mathcal{E} := \mathcal{E}_0 \sum_{j\geq 0} (K)^j \ . \tag{4.42}$$

On trouve alors un inverse à droite $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}$. D'autre part, $\mathcal{P}$ est Fredholm d'indice 0 d'après les propositions 2.25 et 4.4. Donc $\mathcal{E}$ est aussi un inverse à gauche. On obtient :

Corollaire 4.11. — *Il existe*

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\sqrt{h}}) & O(1) \\ O(1) & O(h^\infty) \end{pmatrix} : L^2 \times \mathbb{C} \to H(m) \times \mathbb{C}$$

tel que $\mathcal{P}\mathcal{E} = 1_{L^2\times\mathbb{C}}$, *et* $\mathcal{E}\mathcal{P} = 1_{H(m)\times\mathbb{C}}$.

Les estimations de norme découlent immédiatement de la série de Neumann, de la forme de $\mathcal{E}_0$ et des estimations établies pour le problèmes locaux.

Considérons maintenant le cas $n > 1$: soient $U_\pm^j \subset \mathbb{R}^2$ des entourages de $\rho_\pm^j$ à adhérences disjointes,

$$\chi_\pm^j \in C_c^\infty(U_\pm^j) \text{ indépendantes de } h,\ \chi_\pm^j = 1 \text{ près de } \rho_\pm^j \ , \tag{4.43}$$

et $\chi := (1 - \sum_j (\chi_+^j + \chi_-^j)) \in S(1)$.

Ceci nous permet de résoudre les problèmes « locaux » de manière analogue qu'avant, et nous introduisons $T_\pm^j$, $\tilde{\chi}_\pm^j$ et M comme avant.

Nous avons aussi

$$|\langle e_\pm^j, e_\pm^k \rangle| \leq \delta_{jk} + O(h^\infty) \ . \tag{4.44}$$

Théorème 4.12. — *Soit $\mathcal{P}$ comme dans la définition 4.3, où p remplit les hypothèses 1.3 et 1.4. Soit*

$$\mathcal{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 & F_+ \\ G_- & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{4.45}$$

où

$$E_0 = (\tilde\chi \# M \# \chi)^w + \sum_j \left((\tilde\chi^j_+)^w F^j (T^j_+ \# \chi^j_+)^w + (\tilde\chi^j_- \# T^j_-)^w G^j (\chi^j_-)^w \right) ,$$

$$F_+ v_+ := \sum_k v^k_+ e^k_+ ,$$

$$(G_- v)_k := \langle v, e^k_- \rangle . \tag{4.46}$$

Alors

$$\mathcal{P}\mathcal{E}_0 = 1 - K \tag{4.47}$$

avec $K = O(h^\infty)$ *dans* $\mathcal{L}(L^2 \times \mathbb{C}^n, L^2 \times \mathbb{C}^n)$.

Nous avons aussi l'analogue du corollaire 4.11.

4.4. Cas analytique. —

Lemme 4.13. — *Soit* $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ *indépendant de* h *avec les hypothèses 1.3 et 1.5. Alors* $\forall j = 1, ..., n$ *il existe* $e^j_+ = a^j_+(x, z; h) e^{\frac{i}{h}\varphi^j_+(x,z)} \in \mathscr{S}$, $\|e^j_+\| = 1$, *tel que*

$$\|(p^w - z) e^j_+\| = O(e^{-\frac{1}{Ch}}) . \tag{4.48}$$

Nous avons de plus que $Im\, \varphi^j_+ \sim (x - x^j_+)^2$.

Pour la preuve, nous renvoyons à [**4**].

Lemme 4.14. — *Soit* $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ *indépendant de* h *avec les hypothèses 1.3 et 1.5. Alors* $\forall j = 1, ..., n$ *il existe* $e^j_- = a^j_-(x, z; h) e^{\frac{i}{h}\varphi^j_-(x,z)} \in \mathscr{S}$, $\|e^j_-\| = 1$, *tel que*

$$\|(p^w - z)^* e^j_-\| = O(e^{-\frac{1}{Ch}}) . \tag{4.49}$$

Nous avons de plus que $Im\, \varphi^j_- \sim (x - x^j_-)^2$.

Nous avons

$$|\langle e^j_\pm, e^k_\pm \rangle| \le \delta_{jk} + O(e^{-\frac{1}{Ch}}) . \tag{4.50}$$

Proposition 4.15. — *Soit* $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ *indépendant de* h, *vérifiant les hypothèses 1.3 et 1.5, et soit*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p^w - z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C}^n \to L^2 \times \mathbb{C}^n ,$$

où

$$(R_+u)_j := \langle u, e_+^j \rangle \ ,$$
$$R_-u_- := \sum_k u_-^k e_-^k \ .$$

Alors $\mathcal{P}$ admet un inverse de la forme

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 + O(h^\infty) & F_+ + O(e^{-\frac{1}{Ch}}) \\ G_- + O(e^{-\frac{1}{Ch}}) & O(e^{-\frac{1}{Ch}}) \end{pmatrix} \ , \quad (4.51)$$

où $E_0 = O(\frac{1}{\sqrt{h}})$ est comme dans (4.46) et

$$F_+v_+ := \sum_k v_+^k e_+^k \ ,$$
$$(G_-v)_k := \langle v, e_-^k \rangle \ . \quad (4.52)$$

Démonstration. — Nous commençons par montrer que $E_{-+} = O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ et que $E_+v_+ = F_+v_+ + O(e^{-\frac{1}{Ch}})|v_+|$. Nous cherchons (u^*, u_-^*) tel que

$$\begin{cases} (P-z)u^* + R_-u_-^* = 0 \\ (R_+u^*)_j = \delta_{jk} \end{cases} . \quad (4.53)$$

Alors $u^* = E_+e_k$ où $e_k \in \mathbb{C}^n$, $(e_k)_j = \delta_{jk}$ et $u_-^* = [E_{-+}]_k$ où $[A]_k$ désigne la k-ième colonne de la matrice A.

Nous avons, en utilisant $|\langle e_+^j, e_+^k \rangle| \leq \delta_{jk} + O(e^{-\frac{1}{Ch}})$,

$$\begin{cases} (P-z)e_+^k = O(e^{-\frac{1}{Ch}}) \\ (R_+e_+^k)_j = \delta_{jk} + O(e^{-\frac{1}{Ch}}) \end{cases} . \quad (4.54)$$

Le corollaire 4.11 nous dit que pour la solution (u, u_-) de

$$\begin{cases} (P-z)u + R_-u_- = v \\ R_+u = v_+ \end{cases} , \quad (4.55)$$

nous avons

$$\sqrt{h}\|u\| + |u_-| \leq C(\|v\| + \sqrt{h}|v_+|) \ . \quad (4.56)$$

Ceci implique que

$$\sqrt{h}\|u^* - e_+^k\| + |u_-^*| \leq O(e^{-\frac{1}{Ch}}) \ , \quad (4.57)$$

donc $E_+e_k = e_+^k + O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ et $|[E_{-+}]_k| = O(e^{-\frac{1}{Ch}})$. En sommant sur k, nous obtenons donc que $E_+v_+ = \sum_k v_+^k e_+^k + O(e^{-\frac{1}{Ch}})|v_+|$ et que $E_{-+} = O(e^{-\frac{1}{Ch}})$.

Nous montrons ensuite que $(E_-v)_k = \langle v, e_-^k\rangle + O(e^{-\frac{1}{Ch}})\|v\|$. Pour ceci soit (u^*, u_-^*) la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} (P-z)u^* + R_-u_-^* = v \\ R_+u^* = 0 \end{array} \right. , \tag{4.58}$$

donc $u_-^* = E_-v$. Nous avons

$$\langle (P-z)u^* + R_-u_-^*, e_-^k\rangle = \langle v, e_-^k\rangle \ . \tag{4.59}$$

Donc

$$\langle (P-z)u^*, e_-^k\rangle = \langle u^*, (P-z)^*e_-^k\rangle = O(e^{-\frac{1}{Ch}})\|u^*\| \ , \tag{4.60}$$

et grâce à $|\langle e_-^j, e_-^k\rangle| \leq \delta_{jk} + O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ nous obtenons

$$(u_-^*)_k + O(e^{-\frac{1}{Ch}})(\|u^*\| + |u_-^*|) = \langle v, e_-^k\rangle \ . \tag{4.61}$$

En utilisant (4.56), nous avons

$$(E_-v)_k = (u_-^*)_k = \langle v, e_-^k\rangle + O(e^{-\frac{1}{Ch}})\|v\| \ . \tag{4.62}$$

$\square$

5. Perturbation

5.1. Problème de Grushin perturbé. — Nous considérons $p \in S(\mathbb{R}^2, m)$ avec les hypothèses 1.3 et 1.5.

Nous considérons une perturbation δQ, où $Q : L^2 \to L^2$ avec $\|Q\| \leq 1$, et $\delta << \sqrt{h}$ est un paramètre de perturbation.

Proposition 5.1. — *Soit, pour p et δQ comme ci-dessus,*

$$\mathcal{P}^\delta = \begin{pmatrix} p^w - z + \delta Q & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H(m) \times \mathbb{C}^n \to L^2 \times \mathbb{C}^n \ .$$

Alors il existe $\mathcal{E}^\delta$ de la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\delta &= \mathcal{E}^0 + \begin{pmatrix} \sum_{j\geq 1} E(\delta QE)^j & \sum_{j\geq 1}(E\delta Q)^j E_+) \\ \sum_{j\geq 1} E_-(\delta QE)^j & \sum_{j\geq 1} E_-(\delta QE)^{j-1}(\delta QE_+) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O(\frac{1}{\sqrt{h}}) & O(1) \\ O(1) & O(\sqrt{h}) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.1}$$

tel que $\mathcal{P}^\delta\mathcal{E}^\delta = 1_{L^2\times\mathbb{C}^n}$, $\mathcal{E}^\delta\mathcal{P}^\delta = 1_{H(m)\times\mathbb{C}^n}$.

Démonstration. — Nous avons $\mathcal{P}^\delta\mathcal{E} = 1 + K$ où

$$K = \begin{pmatrix} \delta QE & \delta QE_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{5.2}$$

et

$$\|K\| < C\delta\|Q\|\|E\| << 1 . \tag{5.3}$$

Alors nous obtenons la série de Neumann

$$\mathcal{E}^\delta = \mathcal{E}(1+K)^{-1} = \mathcal{E}\sum_{j=0}^{\infty}(-K)^j . \tag{5.4}$$

$\square$

Nous avons immédiatement le

Corollaire 5.2. —

$$\mathcal{E}^\delta - \mathcal{E}^0 = \begin{pmatrix} O(\frac{\delta}{h}) & O(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) \\ O(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) & O(\delta) \end{pmatrix} . \tag{5.5}$$

Nous obtenons aussi un développement perturbatif de l'hamiltonien effectif :

$$E^\delta_{-+} = E^0_{-+} + \delta E^{(1)}_{-+} + O(\frac{\delta^2}{\sqrt{h}}) . \tag{5.6}$$

De plus, en utilisant aussi la proposition 4.15,

$$(E^{(1)}_{-+})_{ij} = -E^i_- QE^j_+ = -\langle Qe^j_+, e^i_-\rangle + O(e^{-\frac{1}{Ch}}) . \tag{5.7}$$

Nous supposons alors que $\frac{\delta^2}{\sqrt{h}} > e^{-\frac{1}{D_0 h}}$, pour D_0 assez grand, ce qui résulte de l'hypothèse 1.8.

Ceci implique que

$$\det E^\delta_{-+} = \delta^n \sum_{\pi\in S_n}(\prod_j \langle Qe^{\pi(j)}_+, e^j_-\rangle(sign(\pi)) + O(\frac{\delta^{n+1}}{\sqrt{h}}) . \tag{5.8}$$

En écrivant $\partial_{\overline{z}}(\mathcal{P}\mathcal{E}) = 0$, nous obtenons

$$\partial_{\overline{z}}E_{-+} = -E_{-+}(\partial_{\overline{z}}R_+)E_+ - E_-(\partial_{\overline{z}}R_-)E_{-+} . \tag{5.9}$$

Le déterminant de E_{-+} n'est pas holomorphe, mais remplit (pour $\det E_{-+} \neq 0$) l'équation $\partial_{\overline{z}}$ suivante :

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{z}} \det E_{-+} &= \operatorname{tr}\left((\partial_{\overline{z}} E_{-+}) E_{-+}^{-1}\right) \det E_{-+} \\ &= -\operatorname{tr}\left((\partial_{\overline{z}} R_+) E_+ + E_-(\partial_{\overline{z}} R_-)\right) \det E_{-+} \\ &=: -k(z) \det E_{-+} \ ,\end{aligned} \tag{5.10}$$

en utilisant la cyclicité de la trace. Pour l'opérateur non-perturbé, ceci implique

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{z}} \det E^0_{-+} &= -\Big(\sum_j (\langle e^j_+, \partial_z e^j_+\rangle + \langle \partial_{\overline{z}} e^j_-, e^j_-\rangle) + O(e^{-\frac{1}{Ch}})\Big) \det E^0_{-+} \\ &=: -k_0(z) \det E^0_{-+}(z) \ .\end{aligned} \tag{5.11}$$

Nous choisissons alors une solution l_0 de l'équation

$$\frac{1}{h} \partial_{\overline{z}} l_0 = k_0 \tag{5.12}$$

dans un voisinage de Ω et nous obtenons une fonction holomorphe $e^{\frac{l_0}{h}} E^0_{-+}$.

Lemme 5.3. — *Pour h assez petit, et en dénotant $\mathcal{L}(dz) = dRe\, z \wedge dIm\, z$,*

$$(\Delta Re\, l_0(z) + O(h)) \mathcal{L}(dz) = \sum_j (d\xi^j_- \wedge dx^j_- - d\xi^j_+ \wedge dx^j_+) \ , \tag{5.13}$$

et $Re\, l_0$ est strictement sousharmonique :

$$\Delta Re\, l_0(z) > 0 \ . \tag{5.14}$$

Démonstration. — En utilisant la proposition 4.15 et (5.10), nous avons

$$\frac{1}{h} \partial_{\overline{z}} l_0 = -\sum_j (\langle e^j_+, \partial_z e^j_+\rangle + \langle \partial_{\overline{z}} e^j_-, e^j_-\rangle) + O(e^{-\frac{1}{Ch}}) \ . \tag{5.15}$$

Nous omettons l'indice j. Soit e^{hol}_+ tel que $\|(P-z)e^{hol}_+\| = O(e^{-\frac{1}{Ch}})\|e^{hol}_+\|$, $\partial_{\overline{z}} e^{hol}_+ = 0$, de la forme

$$e^{hol}_+ = a_+(x, z; h) e^{\frac{i}{h}\varphi_+(x,z)} \ , \tag{5.16}$$

avec a_+, φ_+ holomorphes en z. Une telle fonction peut se trouver localement en z. Nous avons $p(x, \varphi'_+) = z$, ce qui implique

$$\varphi'_+(x_+) = \xi_+, \ \operatorname{Im} \varphi''_+(x_+) > 0, \ \partial_z \varphi'_+(x_+) = \frac{1}{p_\xi(x_+)} \ . \tag{5.17}$$

Donc x_+ est le seul point réel où φ_+' est réel, et $\operatorname{Im}\varphi_+$ y a un point critique non-dégénéré. Soit

$$\Phi_+(z) = \sup_{x\in \mathrm{vois}_{\mathbb{R}}(x_+)} (-\operatorname{Im}\varphi_+(x,z)) = -\operatorname{Im}\varphi_+(x_+(z),z) \ . \tag{5.18}$$

Alors Φ_+ est sousharmonique en tant que supremum de fonctions harmoniques. De plus, grâce à (5.17),

$$\kappa : (x, -\partial_x\varphi_+(x,z)) \to (z, \partial_z\varphi_+(x,z)) \tag{5.19}$$

est une transformation canonique complexe, et

$$\kappa(\mathbb{R}^2) = \Lambda_{\Phi_+} := \{(z, \frac{2}{i}\partial_z\Phi_+(z))\} \tag{5.20}$$

est une sousvariété IR au sens de [**10**], donc Φ_+ est strictement sousharmonique. En fait, en utilisant que x_+ est un point critique de $\operatorname{Im}\varphi_+$ et que φ_+ est holomorphe,

$$\begin{aligned}\frac{2}{i}\partial_z\Phi_+(z) &= \frac{2}{i}\partial_z(-\operatorname{Im}\varphi_+(x_+(z),z)) = -(\frac{2}{i}\partial_z\operatorname{Im}\varphi_+)(x_+(z),z)\\ &= (\partial_z\varphi_+)(x_+(z),z) \ ,\end{aligned} \tag{5.21}$$

et $\kappa(x_+(z), -\xi_+(z)) = (z, \frac{2}{i}\partial_z\Phi_+(z))$. Ceci implique que

$$\begin{aligned}-d\xi_+\wedge dx_+ = d\zeta\wedge dz|_{\Lambda_{\Phi_+}} &= (\frac{2}{i}\partial_{\overline{z}}\partial_z\Phi_+)d\overline{z}\wedge dz\\ &= (4\partial_{\overline{z}}\partial_z\Phi_+)\frac{1}{2i}d\overline{z}\wedge dz = \Delta\Phi_+\mathcal{L}(dz) \ ,\end{aligned} \tag{5.22}$$

et Φ_+ est strictement sousharmonique.

Ensuite nous avons $e_+ = \frac{e_+^{hol}}{\|e_+^{hol}\|}e^{-\frac{i}{h}\theta_+(z)}$, où $\theta_+(z)$ est réel. Etant donné que

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\partial_z\langle e_+e^{\frac{i}{h}\theta_+(z)}, \partial_z e_+e^{\frac{i}{h}\theta_+(z)}\rangle = \operatorname{Re}\partial_z\langle e_+,\partial_z e_+\rangle - \operatorname{Re}(\frac{i}{h}\partial_z\partial_{\overline{z}}\theta_+)\\ &= \operatorname{Re}\partial_z\langle e_+,\partial_z e_+\rangle \ ,\end{aligned} \tag{5.23}$$

θ_+ ne contribuera pas à $\Delta\operatorname{Re} l_0$ et nous pouvons supposer que $\theta_+ = 0$.

Donc

$$\langle e_+, \partial_z e_+\rangle = \langle \frac{e_+^{hol}}{\|e_+^{hol}\|}, \partial_z(\frac{e_+^{hol}}{\|e_+^{hol}\|})\rangle \ . \tag{5.24}$$

Or

$$2(\partial_z\|e_+^{hol}\|)\|e_+^{hol}\| = \partial_z\|e_+^{hol}\|^2 = \langle\partial_z e_+^{hol}, e_+^{hol}\rangle \ , \tag{5.25}$$

donc

$$\partial_z \frac{1}{\|e_+^{hol}\|} = -\frac{1}{2}\frac{\langle \partial_z e_+^{hol}, e_+^{hol}\rangle}{\|e_+^{hol}\|^3} \ . \tag{5.26}$$

Ceci implique que

$$\langle e_+, \partial_z e_+\rangle = \frac{1}{2\|e_+^{hol}\|^2}(\langle e_+^{hol}, \partial_z e_+^{hol}\rangle) = \frac{1}{2}\partial_{\overline{z}}(\ln \|e_+^{hol}\|^2) \ . \tag{5.27}$$

En utilisant la méthode de la phase stationnaire, nous avons que

$$\|e_+^{hol}\|^2 \sim A(z;h)e^{-\frac{2}{h}\mathrm{Im}\,\varphi_+(x_+,z)} \ , \tag{5.28}$$

donc

$$h\langle e_+, \partial_z e_+\rangle = h\frac{1}{2}\partial_{\overline{z}}(-\frac{2}{h}\mathrm{Im}\,\varphi_+(x_+,z)) + \ln A) = \partial_{\overline{z}}\Phi_+(z) + \frac{h\partial_{\overline{z}}A}{2A} \ . \tag{5.29}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} 4\partial_z h(\langle e_+, \partial_z e_+\rangle)\mathcal{L}(dz) &= (4\partial_z\partial_{\overline{z}}\Phi_+(z) + O(h))\mathcal{L}(dz) \\ &= -d\xi_+ \wedge dx_+ + O(h)\mathcal{L}(dz) \ . \end{aligned} \tag{5.30}$$

Pour $\langle \partial_{\overline{z}} e_-, e_-\rangle = -\langle e_-, \partial_{\overline{z}} e_-\rangle$ nous nous ramenons à e_-^{ahol} tel que $\|(P-z)^* e_-^{ahol}\| = O(e^{-\frac{1}{Ch}})\|e_-^{ahol}\|$, avec $\partial_z(e_-^{ahol}) = 0$. Nous obtenons le résultat similaire. En rassemblant les termes, nous avons donc que

$$(\Delta \mathrm{Re}\, l_0(z) + O(h))\mathcal{L}(dz) = \sum_j (d\xi_-^j \wedge dx_-^j - d\xi_+^j \wedge dx_+^j) \ , \tag{5.31}$$

et $\mathrm{Re}\, l_0(z)$ est strictement sousharmonique. $\square$

Pour l'opérateur perturbé, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_{\overline{z}} \det E_{-+}^\delta &= -\mathrm{tr}\left((\partial_{\overline{z}}R_+)E_+^\delta + E_-^\delta(\partial_{\overline{z}}R_-)\right)\det E_{-+}^\delta \\ &=: -k^\delta(z)\det E_{-+}^\delta \ . \end{aligned} \tag{5.32}$$

En utilisant le corollaire 5.2 et (5.10), on trouve

$$|k^\delta - k^0| \leq O(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}}) \ . \tag{5.33}$$

Alors nous pouvons aussi construire une solution $l^\delta = l^0 + (l^\delta - l^0)$ de l'équation $\frac{1}{h}\partial_{\overline{z}} l^\delta = k^\delta$, avec

$$|l^\delta - l^0| = O(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) \ , \tag{5.34}$$

et $\partial_{\overline{z}}(e^{\frac{l^\delta}{h}}\det E_{-+}^\delta) = 0$.

6. Preuve des théorèmes 1.9, 1.13 et 1.11

Nous commençons par rappeler quelques notions probabilistes.

6.1. Rappels de notions probabilistes. — Soit $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité.

Une variable aléatoire réelle est une application mesurable

$$X : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n \quad . \tag{6.1}$$

Il est possible de considérer une variable aléatoire complexe en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ $(x + iy \equiv (x, y))$. La distribution de X est la mesure P_X (l'image directe de la mesure P par l'application X) ; si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue :

$$P_X = f(x)\mathcal{L}(dx) \ , \tag{6.2}$$

alors f est appelée la densité de distribution de X (c'est le seul cas que nous allons considérer ici). Si

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \ , \tag{6.3}$$

alors nous disons que X est distribué selon une loi normale (centrée en 0, de variance $n\sigma^2$).

Si X est P-intégrable, nous définissons l'espérance

$$E[X] := \int X dP = \int x f(x)\mathcal{L}(dx) \ . \tag{6.4}$$

Si X est de carré sommable, nous définissons la variance

$$\sigma^2(X) := E[(X - E[X])^2] \ . \tag{6.5}$$

Considérons maintenant m variables aléatoires X_i. Les X_i sont appelés indépendants si leur distribution jointe se décompose en produit :

$$P_{\otimes X_i} = P_{X_1} \otimes ... \otimes P_{X_m} \ . \tag{6.6}$$

Considérons, dans le cas où les X_i sont des variables indépendantes réelles (complexes), leur somme : la distribution sera

$$P_{X_1 + ... + X_m} = P_{X_1} * ... * P_{X_m} \ . \tag{6.7}$$

Il en découle que si X_i est distribué selon une loi normale centrée en 0 de variance σ_i^2, $\forall i = 1, ..., m$, alors la somme des X_i sera distribué selon une loi normale centrée en 0 de variance $\sum_i \sigma_i^2$.

6.2. Analyse des zéros d'une fonction holomorphe. — Pour terminer la preuve du théorème 1.9, nous avons besoin d'une proposition concernant les zéros d'une fonction holomorphe.

Soit f une fonction holomorphe dans une domaine $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ et $\Gamma \subset\subset \Omega$ un domaine de bord $\gamma = \partial\Gamma \in C^\infty$. Si γ n'intersecte pas de zéros de f, alors le nombre de zéros de f dans Γ est donné par

$$N(\Gamma, f) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} \ . \tag{6.8}$$

Proposition 6.1 **([6])**. — *Soient Γ, γ et Ω comme ci-dessus. Soit*

$$\phi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}) \ , \tag{6.9}$$

soit f une fonction holomorphe dans Ω avec

$$|f(z; h)| \leq e^{\frac{\phi(z)}{h}}, \ \forall z \in \Omega \ , \tag{6.10}$$

et nous supposons qu'il existe $z_k \in \Omega$, $0 < r_k, \epsilon_k \ll 1$, $k \in J$ tels que

$$B(z_k, 3r_k) \subset \Omega \ \text{et} \ \gamma \subset \bigcup_{k\in J} B(z_k, r_k) \tag{6.11}$$

avec

$$|f(z_k; h)| > e^{\frac{1}{h}(\phi(z_k)-\epsilon_k)} \ . \tag{6.12}$$

Alors nous avons

$$N(\Gamma, f) = \frac{1}{2\pi h}\int_\Gamma \Delta\phi \mathcal{L}(dz) + \sum_{k\in J} O(\frac{r_k^2 + \epsilon_k}{h}) \ . \tag{6.13}$$

Pour la preuve, voir [**6**].

6.3. Preuve du théorème 1.9. — A partir de maintenant, nous supposons partout que $q \in L^\infty$, sans perte sur les estimations de probabilités : pour $M \subset \mathcal{M}$,

$$\underline{P}[\{q \in L^\infty\} \cap M] = \underline{P}[M] \ . \tag{6.14}$$

Lemme 6.2. — *Soient p, q et δ comme dans le théorème 1.9. Il existe $\tilde{D} > 0$ tels que si z_k, $k \in J$ sont des points dans Ω, alors pour h assez petit*

$$\begin{aligned}&\underline{P}\Big[\|q\|_\infty \leq 1 \ \text{et} \ |e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E^\delta_{-+}(z_k)| > e^{\frac{Re l_0(z_k)}{h}}\delta^{n+1} \ , \ \forall k \in J\Big] \\ &\geq 1 - Dh^{-M_0}\sigma(h) - (\frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}})^{\frac{2}{n}}\frac{n|J|}{\sigma^2 h^\kappa} \ . \end{aligned} \tag{6.15}$$

Démonstration. — Supposons que $\|q\|_\infty \leq 1$. Alors, avec $\delta\|Q\| \leq \delta$ et (1.23), les résultats de la section 5 s'appliquent.

Reprenons (5.8). En utilisant $e_+^j = \overline{e_-^j} \in \mathscr{S}$, et en étendant le produit scalaire $\langle u, v\rangle$, $u \in L^2$, $v \in \mathscr{S}$, à $u \in \mathscr{S}'$, nous avons

$$\begin{aligned} \det(E_{-+}^\delta) &= \delta^n \sum_{\pi\in S_n} (\prod_j \langle q(x), e_-^{\pi(j)} e_-^j\rangle) sign(\pi) + O(\frac{\delta^{n+1}}{\sqrt{h}}) \\ &= \delta^n \prod_j \langle q, (e_-^j)^2\rangle + \delta^n O(e^{-\frac{1}{Ch}}) + O(\frac{\delta^{n+1}}{\sqrt{h}}) \ , \end{aligned} \tag{6.16}$$

car $e_-^i e_-^j = O(e^{-\frac{1}{Ch}})$, $i \neq j$. Ceci implique, en utilisant aussi (5.34) et l'hypothèse 1.8, qu'il existe $\tilde{D}$ tel que

$$|e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta| > e^{\frac{\mathrm{Re}\, l_0}{h}} \delta^n (\prod_j |\langle q, (e_-^j)^2\rangle| - \frac{\tilde{D}}{2}\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}}) \ . \tag{6.17}$$

Si $\prod_j |\langle q, (e_-^j)^2(z_k)\rangle| > \frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}}$, alors $|(e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta)(z_k)| \geq e^{\frac{\mathrm{Re}\, l_0(z_k)}{h}} \delta^{n+1}$, donc (en posant $t := (\frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}})^{\frac{1}{n}}$)

$$\begin{aligned} &\underline{P}\Big[\|q\|_\infty \leq 1 \text{ et } |e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E_{-+}^\delta(z_k)| > e^{\frac{\mathrm{Re}\, l_0(z_k)}{h}} \delta^{n+1} \ , \ \forall k \in J\Big] \\ &\geq \underline{P}\Big[\{\|q\|_\infty \leq 1\} \bigcap_{k\in J} \{\prod_j |\langle q, (e_-^j)^2(z_k)\rangle| > t^n\}\Big] \\ &\geq \underline{P}\Big[\{\|q\|_\infty \leq 1\} \bigcap_{k,j} \{|\langle q, (e_-^j)^2(z_k)\rangle| > t\}\Big] \\ &\geq \underline{P}[\|q\|_\infty \leq 1] - \sum_{k,j} \overline{P}\Big[|\langle q, (e_-^j)^2(z_k)\rangle| \leq t\Big] \\ &\geq 1 - Dh^{-M_0}\sigma(h) - (\frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}})^{\frac{2}{n}} \frac{n|J|}{\sigma^2 h^\kappa} \ , \end{aligned} \tag{6.18}$$

en utilisant l'hypothèse 1.8 pour la dernière inégalité. $\square$

Preuve du théorème 1.9. — Supposons que $\|q\|_\infty \leq 1$. Nous voulons appliquer la proposition 6.1 à $f := e^{\frac{l^\delta}{h}} E_{-+}^\delta$ qui est holomorphe, où $\phi = \mathrm{Re}\, l_0$.

En utilisant (6.16) et en développant $l^\delta = l^0 + O(\frac{\delta}{\sqrt{h}})$ nous avons la majoration (6.10) dans Ω :

$$|e^{\frac{l^\delta}{h}} E^\delta_{-+}| \leq \delta^n |e^{\frac{l_0}{h}}|(1 + O(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}})) \leq e^{\frac{\operatorname{Re} l_0}{h}} \ , \tag{6.19}$$

car $\delta < \frac{1}{C_0} h^{\frac{3}{2}}$.

Ensuite nous choisissons un ensemble de points $z_k \in \Omega$, $k \in J$, $|J| = O(\frac{1}{\sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}}})$, tel que pour le domaine Γ du théorème 1.9 nous avons

$$\partial\Gamma \subset \bigcup_{k \in J} B(z_k, \sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}}) \ . \tag{6.20}$$

Soit $\epsilon_k := (n+1) h \ln \frac{1}{\delta}$, $\forall k \in J$ (donc $e^{-\frac{\epsilon_k}{h}} = \delta^{n+1}$). Alors la condition (6.12) devient

$$|e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E^\delta_{-+}(z_k)| \geq e^{\frac{\operatorname{Re} l_0(z_k)}{h}} \delta^{n+1} \ , \ \forall k \in J \ . \tag{6.21}$$

Donc si $\|q\|_\infty \leq 1$ et que (6.21) est valable, la proposition 6.1 implique

$$\begin{aligned} \#\big(\operatorname{Spec}(p^w + \delta Q) \cap \Gamma\big) &= \frac{1}{2\pi h} \int \Delta \operatorname{Re} l_0(z) \mathcal{L}(dz) + |J| O(\frac{h \ln \frac{1}{\delta}}{h}) \\ &= \frac{1}{2\pi h} (|\Gamma_{-+}(\Gamma)| + O(\sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}})) \ , \end{aligned} \tag{6.22}$$

en utilisant (5.13) pour la dernière égalité. En utilisant le lemme 6.2, nous pouvons minorer la probabilité inférieure d'avoir (6.22) par

$$\begin{aligned} &\underline{P}\Big[\|q\|_\infty \leq 1 \text{ et } |e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E^\delta_{-+}(z_k)| > e^{\frac{\operatorname{Re} l_0(z_k)}{h}} \delta^{n+1} \ , \ \forall k \in J\Big] \\ &\geq 1 - D h^{-M_0} \sigma(h) - (\frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}})^{\frac{2}{n}} \frac{n|J|}{2\sigma^2 h^\kappa} \\ &\geq 1 - D h^{-M_0} \sigma(h) - D' (\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}})^{\frac{2}{n}} \frac{1}{\sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}} \sigma^2 h^\kappa} \ . \end{aligned} \tag{6.23}$$

$\square$

6.4. Preuve du théorème 1.11. —

Preuve du théorème 1.11. — Nous voulons adapter la preuve du théorème 1.9 à tous les domaines $\Gamma \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

La proposition 6.1 est valable uniformément pour l' ensemble $\widetilde{\mathcal{F}}$: nous reprenons ici les étapes à généraliser dans la preuve de cette proposition dans [**6**] (proposition 8.1).

Puisque $|G| > \frac{1}{C'}$ sur $\partial\Omega$, nous savons que $d(\overline{\Gamma}, \partial\Omega) > 0$. Nous savons aussi qu'il existe $D > 0$ tel que $L(\partial\Gamma) \leq D$, $\forall \Gamma \in \mathcal{F}$.

Avec $\partial\Gamma = \{G(z) = 0\}$, $|G| + |G'| > \frac{1}{C'}$, et pour r assez petit, $z \in \Omega$, $d(z, \partial\Gamma) \leq \frac{r}{2}$, nous pouvons parametriser $\partial\Gamma \cap B(z,r)$ soit par $x : y = y(x)$ avec $|y'(x)| \leq \tilde{C}$, soit par $y : x = x(y)$ avec $|x'(y)| \leq \tilde{C}$. Nous obtenons alors que $\frac{r}{2} \leq L(\partial\Gamma \cap B(z,r)) \leq \tilde{C}r$.

Donc si nous choisissons un réseau de points $z_k \in \Omega$ de maille $\frac{r}{2}$ tels que

$$\Omega \subset \bigcup_{k \in J} B(z_k, \frac{r}{2}),\ |J| \leq \frac{C}{r^2}\ , \tag{6.24}$$

et que si

$$\tilde{J}_\Gamma = \{z_k; d(z_k, \partial\Gamma) < \frac{r}{2}\}\ , \tag{6.25}$$

alors $\exists C'' > 0$ tel que

$$|\tilde{J}_\Gamma| \leq C'' \frac{1}{r},\ \forall \Gamma \in \widetilde{\mathcal{F}}\ , \tag{6.26}$$

et $\partial\Gamma \subset \bigcup_{k \in \tilde{J}_\Gamma} B(z_k, r)$.

Nous pouvons alors appliquer les résultats locaux dans $B(z_k, r)$. Jusqu'à l'équation (8.21) dans [**6**], nous avons travaillé indépendamment de Γ. Nous utilisons alors que $L(\partial\Gamma \cap B(z,r)) \leq \tilde{C}r$, et en utilisant les paramétrisations ci-dessus, nous voyons que

$$\text{var}\ \arg_{\partial\Gamma \cap B(z,r)}(w - w^*) \leq 2\pi,\ \forall \Gamma \in \widetilde{\mathcal{F}},\ w^* \in \Omega \setminus \partial\Gamma\ . \tag{6.27}$$

Le théorème de Stokes s'applique aussi avec un contour C^2, donc la proposition 6.1 est valable $\forall \Gamma \in \widetilde{\mathcal{F}}$ avec un reste uniforme.

Posons maintenant $r = \sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}}$. Il existe $\tilde{C} > 0$ tel que si $\|q\|_\infty \leq 1$ et que (6.21) est valable $\forall k \in J$, alors $\forall \Gamma \in \widetilde{\mathcal{F}}$

$$\begin{aligned} |\#\big(\mathrm{Spec}(p^w + \delta Q) \cap \Gamma\big) - \frac{1}{2\pi h}|\Gamma_{-+}(\Gamma)|| &\leq |\tilde{J}_\Gamma| \tilde{C} \frac{h \ln \frac{1}{\delta}}{h} \\ &\leq \tilde{C} C'' \frac{\sqrt{h \ln \frac{1}{\delta}}}{h}\ . \end{aligned} \tag{6.28}$$

En utilisant le lemme 6.2, nous avons donc avec une probabilité inférieure minorée par

$$\underline{P}\Big[\|q\|_\infty \leq 1 \text{ et } |e^{\frac{l^\delta}{h}} \det E^\delta_{-+}(z_k)| > e^{\frac{\mathrm{Re}\, l_0(z_k)}{h}} \delta^{n+1} \ , \ \forall k \in J\Big]$$
$$\geq 1 - D\sigma(h)h^{-M_0} - (\frac{\tilde{D}\delta}{h^{\frac{3}{2}}})^{\frac{2}{n}} \frac{n|J|}{2\sigma^2 h^\kappa}$$
$$\geq 1 - D\sigma(h)h^{-M_0} - D'(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}})^{\frac{2}{n}} \frac{1}{h \ln \frac{1}{\delta} \sigma^2 h^\kappa} \tag{6.29}$$

que (6.28) est valable $\forall \Gamma \in \widetilde{\mathcal{F}}$. □

6.5. Preuve du théorème 1.13. — Nous montrons dans ce paragraphe que l'hypothèse 1.12 implique l'hypothèse 1.8.

Commençons par rappeler que si $\tilde{P}$ est comme dans l'hypothèse 1.12, alors le nombre de valeurs propres E_l de $\tilde{P}$ dans un intervalle $[\alpha, \beta]$ est donné par

$$N_h(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi h} \iint_{\tilde{p}^{-1}([\alpha,\beta])} dx d\xi + O(1) \ , \tag{6.30}$$

(Théorème 12.3 dans [**5**]), donc si $N(h) = \frac{C}{h}$, alors $E_{N(h)} = O(1)$.

Lemme 6.3. — *Soit q comme dans l'hypothèse 1.12. Alors il existe M_0 tel que*

$$\underline{P}[q \in L^\infty \text{ et } \|q\|_\infty \leq 1] \geq 1 - h^{-M_0} \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} \ . \tag{6.31}$$

Démonstration. — Nous avons

$$\|q\|_\infty \leq \sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty \ , \tag{6.32}$$

et $\{\sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty \leq 1\} \in \mathcal{A}$ donc

$$\underline{P}[\|q\|_\infty \leq 1] \geq P[\{\sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty \leq 1\}] \ . \tag{6.33}$$

Ensuite nous avons

$$P[\sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty \leq 1] \geq 1 - P[\sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty > 1]$$
$$\geq 1 - E[\sum_{l \leq N} |\alpha_l| \|q_l\|_\infty] \geq 1 - \sum_{l \leq N} \|q_l\|_\infty \sqrt{\frac{\pi\sigma^2}{2}} \ . \tag{6.34}$$

Nous montrons que $\exists C' > 0$ tel que

$$\|q_l\|_\infty \leq \frac{C'}{h^2} \ , l \leq N(h), \tag{6.35}$$

ce qui termine la preuve avec $N(h) = \frac{C}{h}$.

En fait, nous avons pour M assez grand, avec $(\tilde{p}^w)^{-M} = (p_{-M})^w$, $p_{-M} \in S(\mathbb{R}^2, \langle (x,\xi)\rangle^{-M\alpha})$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_l^M}\|q_l\|_\infty &\leq \sup_x |(\tilde{p}^w)^{-M} q_l| \\
&\leq \frac{1}{2\pi h} \sup_{\sqrt{h}x} |\int e^{i(x-\frac{y}{\sqrt{h}})\frac{\xi}{\sqrt{h}}} (p_{-M}(\frac{x\sqrt{h}+y}{2}, \xi)) q_l(y) dy d\xi| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\sqrt{h}} \sup_{\sqrt{h}x} \int \Big(\int \langle (\frac{x\sqrt{h}+y}{2}, \xi\sqrt{h})\rangle^{-2M\alpha} dy\Big)^{\frac{1}{2}} d\xi \|q_l\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi h^{\frac{1}{4}}} \sup_{\sqrt{h}x} \int \Big(\int h^{-M\alpha} \langle (\frac{x+y}{2}, \xi)\rangle^{-2M\alpha} dy\Big)^{\frac{1}{2}} d\xi \\
&\leq C'' h^{-\frac{M\alpha}{2} - \frac{1}{4}} \ .
\end{aligned}$$

Il suffit de choisir M tel que $M\alpha \geq 3$, donc pour $l \leq N(h)$, et en utilisant la remarque après (6.30),

$$\|q_l\|_\infty \leq \frac{C''}{h^2} (E_{N(h)})^{\frac{3}{\alpha}} \leq \frac{C'}{h^2} \ . \tag{6.36}$$

$\square$

Lemme 6.4. — *Il existe κ tel que $\forall z \in \Omega$, $\forall j$, $t > 0$,*

$$P\Big[|\langle q, (e_-^j)^2(z)\rangle| \leq t \Big] \leq \frac{t^2}{2h^\kappa \sigma^2} \ .$$

Démonstration. — Nous avons

$$P\Big[|\langle q, (e_-^j)^2(z)\rangle| \leq t \Big] = P\Big[|\sum_l \alpha_l \langle q_l, (e_-^j)^2(z)\rangle| \leq t \Big] \ .$$

Soit $\beta_l := \langle q_l, (e_-^j)^2(z)\rangle$; la variable aléatoire $\sum_l \alpha_l \beta_l$ est distribuée d'après une loi normale (complexe, centrée en 0) de variance $\sigma^2 \sum_l |\beta_l|^2$, donc

$$P\Big[|\langle q,(e_-^j)^2(z)\rangle|\le t\Big]=1-\exp\Big\{-\frac{t^2}{2\sigma^2\sum_l|\beta_l|^2}\Big\}$$
$$\le\frac{t^2}{2\sigma^2\sum_l|\beta_l|^2}\ . \tag{6.37}$$

Nous montrons que $\exists\kappa$ tel que $\forall z\in\Omega$, $\forall j$, $\sum_{l\le N}|\beta_l|^2\ge h^\kappa$, ce qui terminera la preuve du lemme.

Soit $U\subset\subset\mathbb{R}^2$ un ouvert tel que

$$\overline{\bigcup_j\{(x_-^j(z),2\xi_-^j(z));z\in\Omega\}}\subset U\ , \tag{6.38}$$

et soit $f\in C_c^\infty(\mathbb{R};[0,1])$ telle que $f=1$ sur $\tilde{p}(U)$. Nous fixons (en utilisant la remarque après (6.30))

$$N(h):=\min\{l\ ;\ \mathrm{supp}\,(f)\subset[0,E_l]\}=O(\frac{1}{h})\ . \tag{6.39}$$

Avec le calcul fonctionnel (voir [**5**], chapitre 8),

$$f(\tilde{p}^w)=F^w,F\in S(\mathbb{R}^2,(m')^{-k})\ \forall k\ , \tag{6.40}$$

et $F(x,\xi)=1+O(h^\infty)$ si $(x,\xi)\in U$. En fait, $F(x_0,\xi_0)$ ne dépend que de $\tilde{p}$ et de ses dérivées au point $(x_0,\xi_0)=\rho_0$ (modulo $O(h^\infty)$). Soient U_1,U_2 des voisinages de $\rho_0\in U$, $U_1\subset U_2\subset\subset U$, et soit $\chi\in C_c^\infty(U_2)$, $\chi=1$ sur U_1. Soit $\hat{p}=p(x,\xi)\chi+p(x_0,\xi_0)(1-\chi)$. Alors $f(\hat{p}^w)=1$. De plus, $F(x,\xi)$ est égal au symbole de $f(\hat{p}^w)$ près de (x_0,ξ_0), modulo $O(h^\infty)$, donc $F(x_0,\xi_0)=1+O(h^\infty)$.

Ceci et le lemme 3.7 impliquent que $\forall z\in\Omega$, $\forall j$

$$F^w(e_-^j)^2(z)=(e_-^j)^2(z)+O(h^\infty)\ \text{dans}\ L^2\ . \tag{6.41}$$

Nous avons donc, pour $l\ge N(h)$,

$$\langle(e_-^j)^2(z),q_l\rangle=f(E_l)\langle(e_-^j)^2(z),q_l\rangle+O(h^\infty)=O(h^\infty)\ . \tag{6.42}$$

De plus

$$\langle(e_-^j)^2(z),q_l\rangle=\langle(\tilde{p}^w)^N(e_-^j)^2(z),(\tilde{p}^w)^{-N}q_l\rangle\le\frac{C}{(E_l)^N\sqrt{h}}\ . \tag{6.43}$$

Observons qu'il existe K tel que

$$E_l\ge(hl)^{\frac{1}{2K}}\ . \tag{6.44}$$

En fait, si K est assez grand,

$$\sum_l E_l^{-2K} = \|(p^w)^{-K}\|_{HS}^2 \sim \frac{1}{2\pi h}\int |p(x,\xi)|^{-2K} dx d\xi \leq \frac{C}{h} \ , \tag{6.45}$$

donc (en utilisant que les E_l forment une suite croissante)

$$l E_l^{-2K} \leq \sum_k E_k^{-2K} \leq \frac{C}{h} \ . \tag{6.46}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}
\sum_{l\leq N} |\beta_l|^2 = \sum_{l\leq N(h)} |\langle (e_-^j)^2(z), q_l\rangle|^2 & \\
= \|(e_-^j)^2(z)\|^2 - \sum_{l>N(h)} |\langle (e_-^j)^2(z), q_l\rangle|^2 & \\
\geq \frac{1}{\sqrt{h}} - O(h^\infty) \geq \frac{1}{C} \ . & \qquad (6.47)
\end{aligned}$$

$\square$

Références

[1] L. Boulton, Non-self-adjoint harmonic oscillator, compact semigroups and pseudospectra, J. Operator Theory 47 (2002), no. 2, 413-429

[2] E.B. Davies, Semiclassical states for Non-Self-Adjoint Schrödinger Operators, Commun. Math. Phys. 200 (1999), 35-41

[3] E.B. Davies, Pseudospectra of differential operators, J.Operator theory 43 (2000), 243-262

[4] N. Dencker, J. Sjöstrand, M. Zworski, Pseudospectra of semiclassical (pseudo-) differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 57 (2004), 384-415

[5] M. Dimassi, J. Sjöstrand, Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit, LMS LN 268, Cambridge University press (1999)

[6] M. Hager, Pseudospectre d'opérateurs non-autoadjoints I : un exemple, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, à paraitre, preprint : hal.ccsd.cnrs.fr

[7] B. Helffer, J. Sjöstrand, Résonances en limite semiclassique, Bulletin de la SMF (1986)

[8] L. Hörmander, The analysis of Linear Partial Differential Operators vols. 1-3, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 256, 257, 274, Springer-Verlag (1983-1985)

[9] S. Reddy, P. Schmid, D. Henningson, Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator, Siam J. Appl. Math. 53 (1993), 15-45

[10] J. Sjöstrand, Function spaces associated to global I-Lagrangian manifolds, (in : « Structure of solutions of differential equations », Katata/Kyoto 1995) World Sci. Publishing (1996), River Edge , NJ, 369-423

[11] J. Sjöstrand, Singularités analytiques microlocales, Astérisque 95 (1982)

[12] J. Sjöstrand, Lectures on resonances, http ://daphne.math.polytechnique.fr/˜ sjoestrand/

[13] J. Sjöstrand, M. Zworski, Complex scaling and the distribution of scattering poles, Jour. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 729-769

[14] E.C. Titchmarsh, The theory of functions, Oxford University Press (1939)

[15] L.N. Trefethen, Pseudospectra of linear operators, SIAM rev. 39 (1997), 383-406

[16] M. Zworski, A remark on a paper of E.B. Davies , Proceedings of the AMS 129 (1999), 2955-2957

[17] M. Zworski, Numerical linear algebra and solvability of partial differential equations, Comm. Math. Phys. 229 (2002), 293-307

Mildred Hager, CMLS, Ecole polytechnique, 91128 Palaiseau Cédex, France, UMR 7640 • *E-mail :* `mildred.hager@math.polytechnique.fr`